T 527 CH

LÊ MẬU THỐNG - LÊ MẬU THẢO

Tuyển chọn
500 bài tập
TOÁN 10

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
Đ / VL / 4262

NHÀ XUẤT BẢN HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

500 bài toán lớp 10 được soạn theo các yêu cầu :

Bám sát sách giáo khoa hiện hành.

Các kiến thức cơ bản được tập trung vào từng chuyên đề.

Trong mỗi chuyên đề, chúng tôi tóm lược phần lí thuyết, chỉ ra cách vận dụng lí thuyết vào các bài tập từ dễ đến khó, nâng cao dần theo hướng tiếp cận mức độ các đề thi tuyển sinh Đại học, trích dẫn và giải một số đề thi tuyển sinh Đại học các năm 2002, 2003, 2004.

Đặc biệt, trước mỗi bài giải, chúng tôi đưa ra phần hướng dẫn, phần này hết sức quan trọng, nó giúp bạn đọc tìm được hướng giải quyết bài toán, tóm tắt quá trình giải, để khi giải xong bạn chỉ cần nắm được các ý chính là đủ.

Sách được chia làm hai phần :

Phần 1 : Đại số (300 bài).

Phần 2 : Hình học (200 bài).

Sau mỗi phần, chúng tôi có phần toán tổng hợp nhằm giúp học sinh ôn lại các kiến thức cơ bản, tập trả lời các câu hỏi trắc nghiệm.

Đặt biệt : Cuối sách có 10 đề kiểm tra nhằm giúp học sinh tự đánh giá và kiểm tra lại các kiến thức đã học trong mỗi học kì.

Mỗi đề kiểm tra có :

Câu hỏi lí thuyết.

Câu hỏi trắc nghiệm.

Toán tự luận.

Mặc dù đã cố gắng nhiều khi biên soạn, nhưng chắc không tránh khỏi thiếu sót, chúng tôi mong nhận được sự đóng góp ý kiến xây dựng của quý đồng nghiệp, các em học sinh để lần tái bản sau, sách sẽ hoàn chỉnh hơn.

Tác giả

MỤC LỤC

Phần I ĐẠI SỐ

Chuyên đề 1 Tập hợp và hàm số 05
Chuyên đề 2 Phương trình và bất phương trình bậc nhất một ẩn 30
Chuyên đề 3 Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn 37
Chuyên đề 4 Bất đẳng thức 43
Chuyên đề 5 Nhị thức bậc nhất : f(x) = ax + b 63
Chuyên đề 6 Phương trình bậc hai một ẩn 66
Chuyên đề 7 Hệ phương trình bậc hai đối xứng đối với x và y 78
Chuyên đề 8 Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai 84
Chuyên đề 9 Dấu của tam thức bậc hai 89
Chuyên đề 10 Bất phương trình bậc hai 98
Chuyên đề 11 Xác định giá trị của tham số m để tam thức bậc hai có dấu không thay đổi 109
Chuyên đề 12 So sánh số α với hai nghiệm của phương trình bậc hai 113
Chuyên đề 13 Phương trình và bất phương trình có chứa giá trị tuyệt đối 129
Chuyên đề 14 Phương trình và bất phương trình có chứa căn thức 137
Chuyên đề 15 Tổng hợp cuối năm 153

Phần II HÌNH HỌC

Chuyên đề 1 Vectơ 172
Chuyên đề 2 Trục – Tọa độ trên trục 188
Chuyên đề 3 Hệ trục tọa độ Descartes vuông góc 194
Chuyên đề 4 Tỉ số lượng giác 209
Chuyên đề 5 Tích vô hướng của hai vectơ 222
Chuyên đề 6 Hệ thức lượng trong tam giác 235
Chuyên đề 7 Giải tam giác – Ứng dụng thực tế 244
Chuyên đề 8 Hệ thức lượng trong đường tròn 250
Chuyên đề 9 Tổng hợp cuối năm 256

Đề kiểm tra 290

Đề kiểm tra Học kì I 290
Đề kiểm tra Học kì II và cuối năm 300

Chuyên đề 1 TẬP HỢP VÀ HÀM SỐ

Kiến thức cơ bản

I) Tập xác định của hàm số y = f(x)

- Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là : **$D = \{x \in R \backslash f(x)$ có nghĩa$\}$**
- Cách tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.
  - **Bước 1:** Tìm điều kiện của x ($x \in R$) để f(x) có nghĩa (f(x) được xác định)
  - **Bước 2:** Viết điều kiện trên dưới hình thức tập hợp.

Chú ý :

Hàm số có dạng	Điều kiện để hàm số xác định
$y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$y = \sqrt{P(x)}$	$P(x) \geq 0$
$y = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$Q(x) > 0$

II) Tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_1, x_2 \in (a; b)$

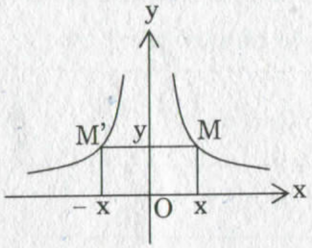
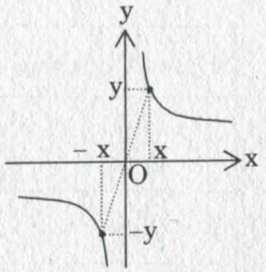
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ khi :	Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ khi :
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

Cách khảo sát tính đơn điệu của hàm số

- **Bước 1 :** Tìm tập xác định D, lấy $x_1, x_2 \in D$, tính $y_1 = f(x_1)$ và $y_2 = f(x_2)$.
- **Bước 2 :** Tính $y_1 - y_2$ theo x_1 và x_2.
- **Bước 3 :** Cho $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$
  - Nếu $y_1 - y_2 < 0$ hay $y_1 < y_2$: Hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
  - Nếu $y_1 - y_2 > 0$ hay $y_1 > y_2$: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

III) Tính chẵn lẻ của một hàm số

<table>
<tr><td colspan="2">Giả sử hàm số y = f(x) có tập xác định D thỏa mãn điều kiện
$\forall$ x, x $\in$ D $\Rightarrow$ − x $\in$ D
(Ta bảo D là tập đối xứng qua O)</td></tr>
<tr><td>Hàm số y = f(x) chẵn trên D</td><td>Hàm số y = f(x) lẻ trên D</td></tr>
<tr><td>Định nghĩa
f(− x) = f(x), $\forall$ x $\in$ D
Tính chất
Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng

 </td><td>Định nghĩa
f(− x) = − f(x), $\forall$ x $\in$ D
Tính chất
Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng

 </td></tr>
</table>

IV) Hàm số bậc nhất : y = ax + b (1)

Định nghĩa

Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng : y = ax + b (a ≠ 0) (1)

- Tập xác định : D = R
- Tính chất : $\left[\begin{array}{l} a > 0 \Rightarrow \text{Hàm số (1) đồng biến trên R} \\ a < 0 \Rightarrow \text{Hàm số (1) nghich biến trên R} \end{array}\right.$

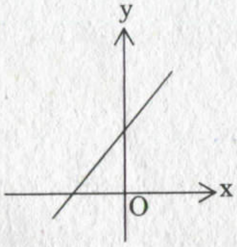
a > 0

x	−∞		+∞
y = ax + b	−∞	↗	+∞

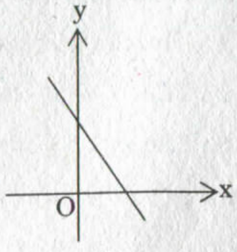
a < 0

x	−∞		+∞
y = ax + b	+∞	↘	−∞

- **Đồ thị** : Đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng.



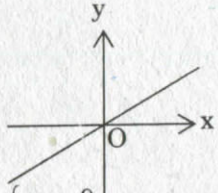
a > 0



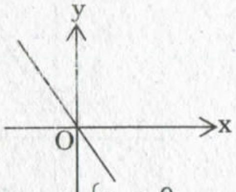
a < 0

- **Đặc biệt**

a) Nếu b = 0 thì y = ax và đồ thị là đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

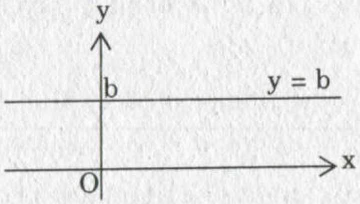


$\begin{cases} a > 0 \\ b = 0 \end{cases}$



$\begin{cases} a < 0 \\ b = 0 \end{cases}$

b) Nếu a = 0 thì y = b là hàm số hằng và đồ thị là đường thẳng cùng phương với trục hoành Ox (Ta bảo hàm số hằng có đồ thị là đường thẳng nằm ngang).

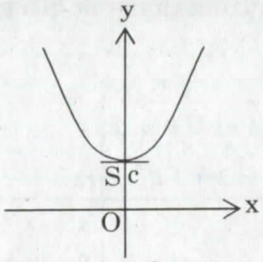


V) Hàm số bậc hai : $y = ax^2 + bx + c$ (a ≠ 0) (1)

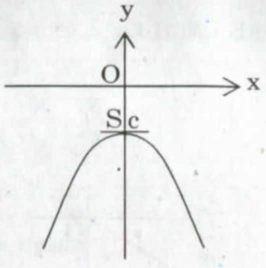
1) Dạng $y = ax^2 + c$ (a ≠ 0) (1)

- Tập xác định D = R
- Hàm số (1) là hàm số chẵn ⇒Đồ thị hàm số (1) có trục đối xứng là Oy.
- Bảng biến thiên

<table>
<tr><td>a > 0
<table><tr><td>x</td><td>− ∞</td><td></td><td>0</td><td></td><td>+ ∞</td></tr><tr><td>y</td><td>+ ∞</td><td>↘</td><td>c</td><td>↗</td><td>+ ∞</td></tr></table>Hàm số (1) :
♦ Đồng biến trên khoảng (0; + ∞)
♦ Nghịch biến trên khoảng (− ∞; 0)</td><td>a < 0
<table><tr><td>x</td><td>− ∞</td><td></td><td>0</td><td></td><td>+ ∞</td></tr><tr><td>y</td><td>− ∞</td><td>↗</td><td>c</td><td>↘</td><td>− ∞</td></tr></table>Hàm số (1) :
♦ Đồng biến trên khoảng (− ∞; 0)
♦ Nghịch biến trên khoảng (0; + ∞)</td></tr>
<tr><td colspan="2">♦ Đồ thị là một parabol có :
Đỉnh S(0 ; c)
− Trục đối xứng là Oy.</td></tr>
</table>



a > 0



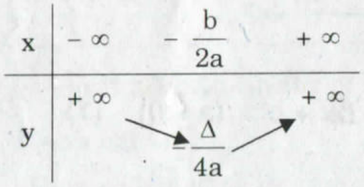
a < 0

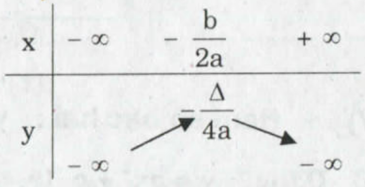
2) Dạng $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ (2)

- Biến đổi về dạng $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a} = aX^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

với $\begin{cases} X = x + \dfrac{b}{2a} \\ \Delta = b^2 - 4ac \end{cases}$ (Ta trở về dạng $y = ax^2 + c$)

- Bảng biến thiên

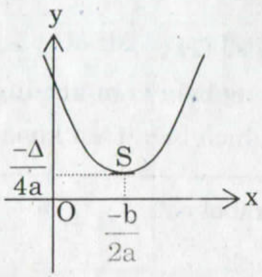




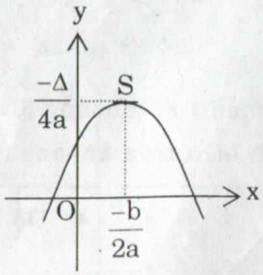
Đồ thị là một parabol có :

– Đỉnh $S\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$

– Trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$



a > 0



a < 0

Bài 1. **a) Cho tập A có n phần tử $(n \geq 1)$. Chứng minh A có 2^n tập con.**

b) Cho A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Gọi B là tập con của A sao cho B chứa 1 mà không chứa 2. Hỏi có bao nhiêu tập B ?

✶ *Hướng dẫn*

a) Dùng phương pháp qui nạp.

b) Hình thành tập B :

- Tìm tập A' = A\{1, 2}
- Tìm các tập con của A' rồi thêm số 2 vào mỗi tập con này ta có tập B

GIẢI

a) Xét mệnh đề P(n) **"A có n phần tử $(n \geq 1)$ thì A có 2^n tập con"**

- Ta có P(1) đúng vì nếu A có một phần tử thì A có $2^1 = 2$ tập con, đó là tập ∅ và A.
- Giả sử mệnh đề P(n) đúng khi n = k $(k \geq 1, k \in N)$ ta chứng minh P(n) đúng khi n = k + 1.

– Thật vậy, khi A có k phần tử, chẳng hạn : $A = A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ thì A có 2^k tập con, đó là { }, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, ..., $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

Do đó khi A được thêm một phần tử (a_{k+1} chẳng hạn) thì A có thêm 2^k tập hợp con bằng cách thêm phần tử a_{k+1} vào các tập con nói trên, đó là $\{a_{k+1}\}$, $\{a_1, a_{k+1}\}$, ..., $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$

⇒ A có $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ tập con

⇒ Mệnh đề P(n) đúng khi n = k + 1 (đpcm)

b) ♦ Từ tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ta có tập A' = A\{1, 2} = {3, 4, 5, 6} (A' ⊂ A)

♦ Tìm tất cả tập con của A' (các tập con này không chứa 1 và 2) rồi thêm phần tử 1 vào mỗi tập con của A' ta sẽ được tập con B theo yêu cầu đề bài.

Vậy số tập B = số tập con của A' = $2^4 = 16$

Bài 2. **Cho biểu thức $T = \dfrac{|a| - 1}{a^2 - 1} + \dfrac{|a| - a^2}{1 - 2|a| + a^2}$.**

Hãy tìm tất cả giá trị của a để T được xác định và rút gọn T ?

✶ *Hướng dẫn*

- Chú ý : $a^2 = |a|^2$ và $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- T xác định khi mẫu ≠ 0.

GIẢI

- T xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 1 \neq 0 \\ 1 - 2|a| + a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \neq 1 \\ (|a| - 1)^2 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow |a| \neq 1 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$$

- Rút gọn $T = \dfrac{|a| - 1}{a^2 - 1} + \dfrac{|a| - |a|^2}{(|a| - 1)^2} = \dfrac{|a| - 1}{(|a| - 1)(|a| + 1)} - \dfrac{|a|.(|a| - 1)}{(|a| - 1)^2}$

$$= \frac{1}{|a| + 1} - \frac{|a|}{|a| - 1} = \frac{|a| - 1 - |a|.(|a| + 1)}{(|a| - 1)(|a| + 1)}$$

$$= \frac{-1 - |a|^2}{|a|^2 - 1} = \frac{1 + a^2}{1 - a^2}$$

Bài 3. Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$

⁎ ***Hướng dẫn***

- Biến đổi $y = \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2} = |A| - |B|$
- Tìm dấu của A và B rồi làm mất dấu trị tuyệt đối.

$$\left(\textbf{Chú ý}: |u| = \begin{cases} u \text{ nếu } u \geq 0 \\ -u \text{ nếu } u < 0 \end{cases}\right)$$

- Vẽ đồ thị.

GIẢI

- **Bước 1 :** Ta có $y = \sqrt{(x - 1)^2} - \sqrt{(2x + 1)^2} = |x - 1| - |2x + 1|$
- **Bước 2 :** Xét dấu (x − 1) và 2x + 1
- $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ và $x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$
- $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$ và $2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2}$

Tóm tắt

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		1		$+\infty$
x − 1		−	|	−	0	+	
2x + 1		−	0	+	|	+	

- **Bước 3 :**
- $x \leq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -(x - 1) + (2x + 1) = x + 2$

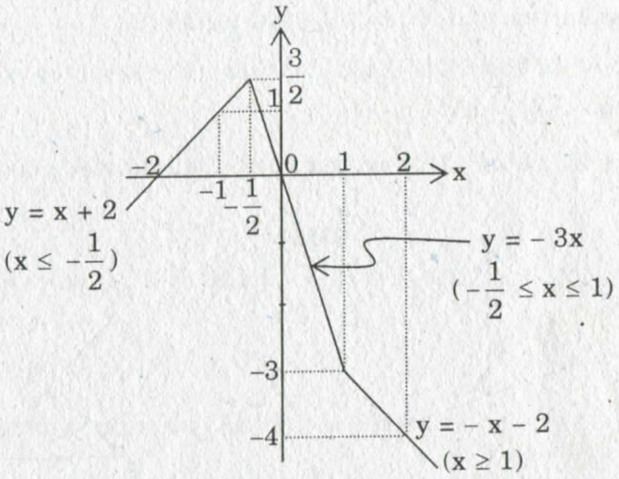
x	− 1	$-\dfrac{1}{2}$
y	1	$\dfrac{3}{2}$

- $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow y = -(x - 1) - (2x + 1) = -3x$

x	$-\dfrac{1}{2}$	1
y	$\dfrac{3}{2}$	− 3

- $x \geq 1 \Rightarrow y = (x - 1) - (2x + 1) = -x - 2$

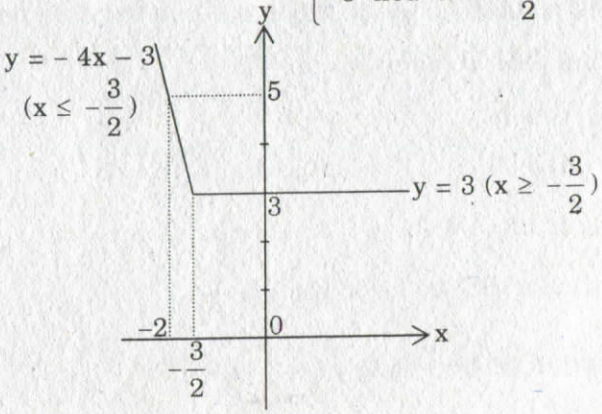
x	1	2
y	− 3	− 4



Bài 4. Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 + 12x + 9} - 2x$.

✶ ***Hướng dẫn***

- Giải giống bài 3
- $y = |2x + 3| - 2x \Leftrightarrow y = \begin{cases} -4x - 3 \text{ nếu } x \leq -\dfrac{3}{2} \\ 3 \text{ nếu } x \geq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$



Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Biết A(1; 6) và trung điểm BC là M(0; 3).

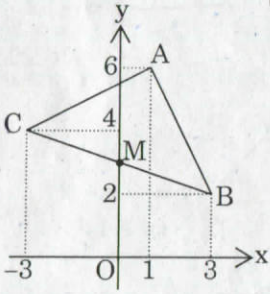
Tìm phương trình các cạnh và tọa độ của B, C ?

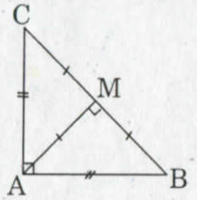
★ ***Hướng dẫn***

- Tìm phương trình (AM).
- Viết phương trình (BC) (1)

  Chú ý : (BC) qua M và vuông góc với (AM)
- $AM \perp BC$ & $AM = \dfrac{BC}{2} = MB = MC$ ⇒ Tam giác AMB, tam giác AMC vuông cân tại M ⇒ $AB = AC = AM\sqrt{2}$
- Gọi (x; y) là tọa độ B (hoặc C), tính AB^2 theo x và y, tính AM^2 rồi thay vào $AB^2 = 2AM^2$ (2)
- Giải hệ (1) và hệ (2) ta có tọa độ B, C từ đó viết phương trình (AB) và (AC)

GIẢI





- A(1; 6), M(0; 3) ⇒ $AM^2 = (1-0)^2 + (6-3)^2 = 10$
- Tam giác ABC vuông cân tại A nên $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM = \dfrac{BC}{2} = MB = MC = \sqrt{10} \end{cases}$
- Tam giác MAB và tam giác MAC vuông cân tại M

  $\Rightarrow AB = AC = AM\sqrt{2} = \sqrt{10}.\sqrt{2} = 2\sqrt{5}$
- Phương trình (AM) có dạng $y = ax + b$.

  (AM) qua $\begin{cases} A(1; 6) \\ M(0; 3) \end{cases}$ nên $\begin{cases} 6 = a + b \\ 3 = a(0) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$

  Vậy phương trình (AM) là $y = 3x + 3$ (hệ số góc = 3)
- $(BC) \perp (AM)$ nên (BC) có hệ số góc $= -\dfrac{1}{3}$

  ⇒ Phương trình (BC) có dạng $y = -\dfrac{1}{3}x + m$

  (BC) qua M(0; 3) nên $3 = -\dfrac{1}{3}(0) + m \Leftrightarrow m = 3$

  Vậy phương trình (BC) là $y = -\dfrac{1}{3}x + 3$ (1)
- Gọi (x; y) là tọa độ B (hoặc C), ta có : $AB^2 = AC^2 = (x-1)^2 + (y-6)^2$ mà $AB = 2\sqrt{5}$ nên $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 20$ (2)
- Giải hệ $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x + 3 \quad (1) \\ (x-1)^2 + (y-6)^2 = 20 \quad (2) \end{cases}$
- Từ (1) ta có : $x = 9 - 3y$, thay $x = 9 - 3y$ vào (2) ta được :

  $(9 - 3y - 1)^2 + (y - 6)^2 = 20 \Leftrightarrow 10y^2 - 60y + 80 = 0$

  $\Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \Rightarrow x = 3 \\ y = 4 \Rightarrow y = -3 \end{array}\right.$

Đáp số : B(3 ; 2) và C(– 3 ; 4)

- Phương trình (AB) có dạng $y = kx + b$, (AB) qua A(1 ; 6) và B(3 ; 2) nên $\begin{cases} 6 = k + b \\ 2 = 3k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ b = 8 \end{cases}$

  Vậy phương trình của (AB) là $y = -2x + 8$
- Tương tự, phương trình của (AC) là : $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{11}{2}$

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC vuông tại A(–1 ; 2). Biết B(0 ; 4) và AC = 2AB. Tìm tọa độ C ($x_C > 0$).

★ ***Hướng dẫn***

- Tính AB và viết phương trình (AB) (Giống bài 5)
- $(AC) \perp (AB)$, (AC) qua A ⇒ Phương trình của (AC) (1)
- Gọi (x; y) là tọa độ C (x > 0). Tính AC^2 theo x, y rồi cho $AC^2 = 4AB^2$ ta sẽ có một phương trình bậc hai ẩn số x, y (2)
- Giải hệ $\begin{cases} \text{Phương trình (AC)} \quad (1) \\ AC^2 = 4AB^2 \quad (2) \end{cases}$

Đáp số :

- (AB) : $y = 2x + 4$, (AC) : $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ (1)
- $AC^2 = 4AB^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$ (2)
- Giải hệ $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$ (x > 0) **Đáp số** : C(3; 0)

Bài 7.

a) Vẽ đồ thị hàm số : $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

b) Biện luận theo m số nghiệm phương trình :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = m \quad (1)$$

★ ***Hướng dẫn***

a) Giải giống bài 3.

b) Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số đã vẽ và đường thẳng y = m.

GIẢI

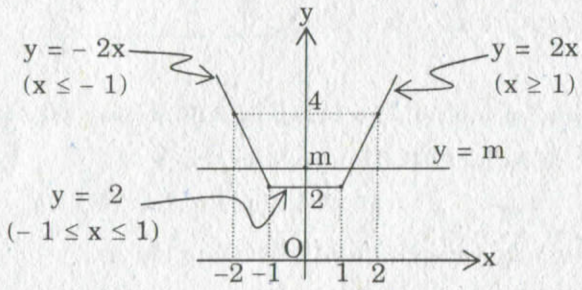
a) Vẽ đồ thị hàm số $y = |x + 1| + |x - 1|$

x	−∞		−1		1		+∞
x + 1		−	0	+	|	+	
x − 1		−	|	−	0	+	

$$\Leftrightarrow y = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x \le -1 \\ 2 & \text{nếu } -1 \le x \le 1 \\ 2x & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$$

x	− 2	− 1
y	4	2

x	1	2
y	2	4



b) Biện luận theo m số nghiệm phương trình (1)

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã vẽ và đường thẳng $(d_m) : y = m$

m	Số nghiệm phương trình (1)
m > 2	2
m = 2	Vô số nghiệm $x \in [-1 ; 1]$
m < 2	0

ài 8. Cho hàm số $y = \sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x}$ (1)

a) Chứng minh đồ thị hàm số (1) có trục đối xứng.

b) Trên khoảng (0 ; 2) hàm số (1) tăng hay giảm.

Hướng dẫn

a) Đặt f(x) = ... Tìm tập xác định D của hàm số.

Tính f(−x) theo x rồi so sánh f(−x) và f(x)

b) Lấy $x_1, x_2 \in (0 ; 2)$, tính $y_1 = f(x_1)$ và $y_2 = f(x_2)$ rồi tính $y_1 - y_2$.

Cho $x_1 < x_2$ rồi tìm dấu của $y_1 - y_2$.

GIẢI

a) Đặt $f(x) = \sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \ge 0 \\ 2 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$

Vậy tập xác định của hàm số là D = [− 2; 2] (đây là tập đối xứng)

Ta có $x \in [-2; 2] \Rightarrow -x \in [-2 ; 2]$

- $f(-x) = \sqrt{2 + (-x)} + \sqrt{2 - (-x)} = \sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x} = f(x)$

Vậy hàm số (1) là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng là trục tung (đpcm).

b) Lấy $x_1, x_2 \in (0; 2)$ ta có : $\begin{cases} y_1 = f(x_1) = \sqrt{2 + x_1} + \sqrt{2 - x_1} \\ y_2 = f(x_2) = \sqrt{2 + x_2} + \sqrt{2 - x_2} \end{cases}$

Ta có : $y_1 - y_2 = \left(\sqrt{2 + x_1} - \sqrt{2 + x_2}\right) + \left(\sqrt{2 - x_1} - \sqrt{2 - x_2}\right)$

$$= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2 + x_1} + \sqrt{2 + x_2}} + \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2}}$$

$$= (x_1 - x_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2 + x_1} + \sqrt{2 + x_2}} - \frac{1}{\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2}}$$

$$= (x_1 - x_2) \frac{\left(\sqrt{2 - x_1} - \sqrt{2 + x_1}\right) + \left(\sqrt{2 - x_2} - \sqrt{2 + x_2}\right)}{\left(\sqrt{2 + x_1} + \sqrt{2 + x_2}\right)\left(\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2}\right)} \quad (*)$$

$$0 < x_1 < x_2 < 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 + x_1, 2 - x_1, 2 + x_2, 2 - x_2 > 0 \\ \sqrt{2 - x_1} < \sqrt{2 + x_1} \text{ và } \sqrt{2 - x_2} < \sqrt{2 + x_2} \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_1 - y_2 > 0 \Rightarrow$ Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng (0; 2)

Bài 9. Tìm hai hàm số f(x) và g(x) biết $\begin{cases} 3f(x+1) - 2g(x+1) = 12x+1 & (1) \\ f(x) + 2g(x) = -4x-1 & (2) \end{cases}$

✶ *Hướng dẫn*

- Đối với (1), đặt $t = x + 1$ ta có $3f(t) - 2g(t) =$ .... sau đó thay t bởi x ta có $3f(x) - 2g(x) =$ .... (3)
- Giải hệ (3) và (2).

GIẢI

- Đối với (1), đặt $t = x + 1 \Leftrightarrow x = t - 1$, ta có :

  $3f(t) - 2g(t) = 12(t - 1) + 1 = 12t - 11.$

  Thay t bởi x ta có $3f(x) - 2g(x) = 12x - 11$ (3)
- Cộng (2) và (3) ta được $4f(x) = 8x - 12$ hay $f(x) = 2x - 3$, thay f(x) vào (2) ta có : $2x - 3 + 2g(x) = -4x - 1 \Leftrightarrow g(x) = -3x + 1$

Bài 10. Xác định hàm số f(x) và g(x) biết $\begin{cases} f(x) - 2g(x) = 11 \\ f(1-2x) + g(1-2x) = -6x + 5 \end{cases}$

✶ *Hướng dẫn*

Giải giống bài 9.

Đáp số : $f(x) = 2x + 5$ và $g(x) = x - 3$

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ, gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là đồ thị hàm số $y = -x + 1$, $y = x + 3$ và $y = 2x + m$.

Xác định m để d_1, d_2, d_3 tạo thành tam giác ABC và trong trường hợp này, chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông. Xác định tọa độ đỉnh góc vuông ?

✶ *Hướng dẫn*

- Chứng minh d_1, d_2, d_3 cắt nhau từng đôi một.
- Tìm giao điểm A của d_1 và d_2 rồi sau đó cho d_3 không qua A.
- Chứng minh $d_1 \perp d_2$.

Cần nhớ:

Hai đường thẳng (d) : $y = ax + b$ và (d') : $y = a'x + b'$

- *(d) và (d') cắt nhau* $\Leftrightarrow a \neq a'$
- *(d) // (d')* $\Leftrightarrow a = a'$ *và* $b \neq b'$
- *(d) ⊥ (d')* $\Leftrightarrow a.a' = -1$

GIẢI

- Ta thấy d_1, d_2, d_3 có hệ số góc lần lượt là $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ và $a_3 = 2$. a_1, a_2, a_3 khác nhau đôi một $\Rightarrow$ d_1, d_2, d_3 cắt nhau từng đôi một.
- Tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 là nghiệm hệ phương trình :

  $$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

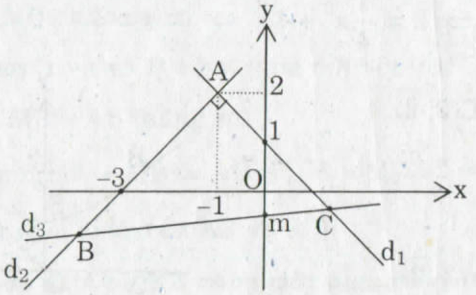
  Vậy $d_1 \cap d_2 = A(-1; 2)$
- d_1, d_2, d_3 tạo thành tam giác ABC $\Leftrightarrow$ d_3 không qua A.

$\Leftrightarrow 2 \neq 2(-1) + m \Leftrightarrow m \neq 4.$

- Ta có $a_1.a_2 = -1 \Rightarrow d_1 \perp d_2 \Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A.

Kết luận

Với $m \neq 4$ thì d_1, d_2, d_3 tạo thành tam giác ABC vuông tại A(– 1; 2)



Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ, cho A($\sqrt{3}$; 2), B(0; 1) và đường thẳng (d) : $y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}} + 3$. Biết (d) cắt trục tung tại C, chứng minh ABC là tam giác đều.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
Đ / VL / A262

✶ *Hướng dẫn*

Tìm tọa độ C sau đó tính AB, BC, CA.

Đáp số : C(0; 3), và AB = BC = CA = 2.

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đỉnh S(0; 1) và qua điểm (– 4; 5).

Trên (P), lấy hai điểm A và B có tung độ bằng 2 ($y_A = y_B = 2$).

Chứng minh tam giác OAB vuông cân (O là gốc tọa độ)

✶ *Hướng dẫn*

- Đỉnh $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right) \equiv S(0; 1) \Rightarrow b =$ ...., $c =$ ....

- Cho (P) qua điểm (– 4; 5) $\Rightarrow$ .... $\Rightarrow$ a = ...
- Tọa độ B và C : $y_B = y_C = 2 \Rightarrow$ .... = 2 (B, C $\in$ (P))
- Tính OA, OB, AB.

GIẢI

(P): $y = x^2 + ax + b, (a \neq 0)$

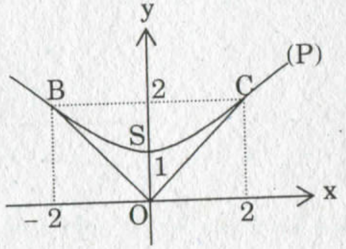
- Đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right) \equiv S(0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow b = 0$ và $c = 1$
- Với b = 0 và c = 1, ta có (P) : $y = ax^2 + 1$

  Mà (P) qua điểm (– 4; 5) nên $5 = 16a + 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

  Vậy (P) : $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$
- Tọa độ B và C ?

  $\left.\begin{matrix} y_B = y_C = 2 \\ B, C \in (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 = \frac{1}{4}x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$

  Vậy B(– 2; 2) và C(2; 2)



$\Rightarrow \begin{cases} OB = OC = 2\sqrt{2} \\ BC = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} OB = OC = 2\sqrt{2} \\ OB^2 + OC^2 = BC^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tam giác OBC vuông cân tại O(0; 0)

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh S(2; – 1) và cắt trục tung tại điểm C có tung độ $y_C = 3$.

a) Tính a, b, c.

b) Trên (P) lấy điểm A có hoành độ $x_A = 3$.

Chứng minh tam giác SAC vuông và tính chu vi tam giác SAC.

★ ***Hướng dẫn***

a) * C(0; 3) $\in$ (P) nên .... $\Leftrightarrow$ c = 3

- Đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) \equiv S(2; -1)$ nên :

$$-\frac{b}{2a} = 2 \quad \text{và} \quad \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -1$$

Đáp số : a = 1; b = – 4 và c = 3 $\Rightarrow$ (P) : $y = x^2 - 4x + 3$

b) S(2; – 1); C(0; 3), A(3; 0)

Ta có $SC = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$, $SA = \sqrt{2}$, $AC = 3\sqrt{2}$

Dùng định lí Pitago ta được tam giác SAC vuông tại A và có chu vi $2p = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5} = 2\left(2\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm :

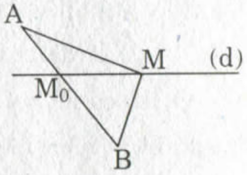
A(1 ; 2), B(– 3 ; – 1) và C(3 ; $\frac{1}{2}$)

a) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho MA + MB ngắn nhất.

b) Tìm điểm I trên trục tung sao cho chu vi tam giác IAC đạt giá trị nhỏ nhất.

Kiến thức cơ bản

Cho hai điểm A, B và đường thẳng (d). Tìm điểm M trên (d) sao cho MA + MB ngắn nhất.



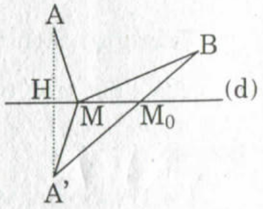
♦ **Trường hợp 1 : A và B ở hai phía đối với (d).**

- MA + MB ≥ AB (hằng số)

  Vậy min(MA + MB) = AB $\Leftrightarrow M \equiv M_0$

  (M_0 là giao điểm của AB và (d))

♦ **Trường hợp 2 : A và B ở cùng một phía đối với (d).**



- Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (d).
- M $\in$ (d) $\Leftrightarrow$ MA = MA'

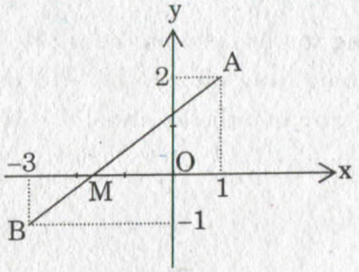
  Ta có : MA + MB = MA' + MB ≥ A'B (hằng số)

  Vậy min(MA + MB) = A'B

$\Leftrightarrow$ $M \equiv M_0$ (M_0 là giao điểm của A'B và (d)).

GIẢI

a) MA + MB ngắn nhất



- Ta thấy A và B ở hai phía đối với trục hoành (vì y_A và y_B trái dấu)
- $M \in Ox$: $MA + MB \geq AB$ (hằng số)

Vậy $\min(MA + MB) = AB \Leftrightarrow M \equiv M_0$ (M_0 là giao điểm của AB và trục hoành).

– Phương trình (AB) có dạng : $y = kx + m$.

(AB) qua $A(1 ; 2)$ và $B(-3 ; -1)$ nên $\begin{cases} 2 = k + m \\ -1 = -3k + m \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $k = \frac{3}{4}$ và $m = \frac{5}{4}$. Vậy phương trình của (AB) là : $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

– Đường thẳng AB cắt trục hoành tại $M_0(-\frac{5}{3} ; 0)$

Đáp số : $M \in Ox$ và $\min(MA + MB) = AB \Leftrightarrow M(-\frac{5}{3} ; 0)$

b) Tam giác IAC có chu vi nhỏ nhất

Chu vi của tam giác IAC là $2p = AC + IA + IC$ mà AC không đổi nên 2p nhỏ nhất $\Leftrightarrow IA + IC$ nhỏ nhất.

- Ta thấy A và C ở cùng một phía đối với trục tung (vì x_A và x_C cùng dấu)
- $A'(-1 ; 2)$ là điểm đối xứng của A qua Oy.
- $I \in Oy$ ta có $IA = IA'$
- Ta có $IA + IC = IA' + IC \geq A'C$ (hằng số)

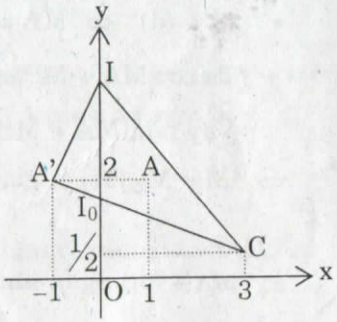
  Vậy $\min(IA + IC) = A'C \Leftrightarrow I \equiv I_0$ (I_0 là giao điểm của (AC) và trục tung)
- Phương trình của (A'C) : $y = -\frac{3}{8}x + \frac{13}{8}$ (học sinh tự giải)

  (Tương tự cách tìm phương trình đường thẳng (AB) trong câu a)
- (A'C) cắt trục tung tại điểm $I_0(0 ; \frac{13}{8})$

Đáp số :

I ∈ Oy và chu vi tam giác IAC nhỏ nhất

$\Leftrightarrow I(0; \frac{13}{8})$



Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ, cho ba điểm : M(–1; 1), N(4; –2), P(1; 3).

a) Tìm điểm I trên trục tung sao cho IM + IN ngắn nhất.

b) Tìm điểm J trên trục hoành sao cho JM + JP nhỏ nhất.

★ *Hướng dẫn* Giải giống bài 15

Đáp số : $I\left(0; \frac{2}{5}\right)$ $J\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d) : $y = x - 2$.

Tìm điểm M trên (P) sao cho khoảng cách từ M đến (d) ngắn nhất.

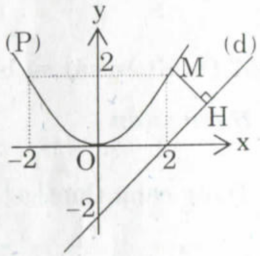
★ *Hướng dẫn*

- Lấy điểm M(m; .....) ∈ (P)
- Vẽ MH ⊥ (d), H ∈ (d), tìm phương trình (MH).
- Tìm tọa độ H : Giải hệ phương trình (d) và (MH).
- Tính độ dài MH.

GIẢI

- $M(x_M; y_M) \in (P)$, ta có : $y_M = \frac{1}{2}x_M^2$,

  Đặt $x_M = m$, ta có : $y_M = \frac{1}{2}m^2 \Rightarrow M(m ; \frac{1}{2}m^2)$



- Vẽ MH ⊥ (d), (H) ∈ (d).

  Phương trình của (MH) có dạng :

  $y = -x + b$, (MH) qua $M(m ; \frac{1}{2}m^2)$ nên :

  $\frac{1}{2}m^2 = -m + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}m^2 + m$

  Vậy (MH) có phương trình : $y = -x + \frac{1}{2}m^2 + m$
- Tọa độ H là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} (MH) : y = -x + \frac{1}{2}m^2 + m \\ (d) : y = x - 2 \end{cases}$

  Giải hệ này ta có $x - 2 = -x + \frac{1}{2}m^2 + m \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2}m^2 + m + 2$

  $\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m - 1$

  Vậy $H\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + 1; \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m - 1\right)$
- Ta có $MH^2 = (x_H - x_M)^2 + (y_H - y_M)^2$

$$= \left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m + 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m - 1\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m + 1\right)^2$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m + 1\right)^2 = \frac{1}{8}\left(m^2 - 2m + 4\right)^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[(m-1)^2 + 3\right]^2 \geq \frac{1}{8} \times 9 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow MH \geq \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ (hằng số)}$$

Kết luận : $\min(MH) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = 1 \Leftrightarrow M(1;\ \frac{1}{2})$.

Bài 18. Tìm điểm $A \in (P) : y = -x^2$ sao cho khoảng cách từ A đến đường thẳng $y = 2x + 4$ ngắn nhất.

✶ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 17

Đáp số : $A(-1\ ;\ -1)$ và $\min(AH) = \frac{3}{\sqrt{5}}$

Bài 19. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + |2x - 4| + 1$ (1)

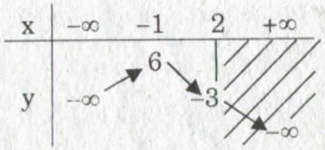
✶ ***Hướng dẫn***

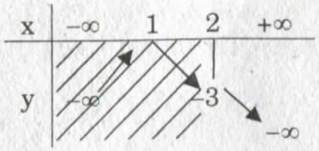
- Dùng công thức $|a| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \geq 0 \\ -a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$ để làm mất dấu trị tuyệt đối của (1)
- Khảo sát hàm số $y = ax^2 + bx + c$ trong mỗi trường hợp.

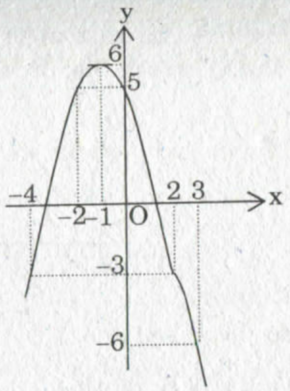
GIẢI

- $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, lúc đó $|2x - 4| = 2x - 4 \Rightarrow y = -x^2 + 2x - 3$.
- $2x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$, lúc đó $|2x - 4| = -2x + 4 \Rightarrow y = -x^2 - 2x + 5$.

$x \leq 2$	$x \geq 2$
$y = -x^2 - 2x + 5$ * $x = -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow y = 6$	$y = -x^2 + 2x - 3$ * $x = -\frac{b}{2a} = 1$ (loại)





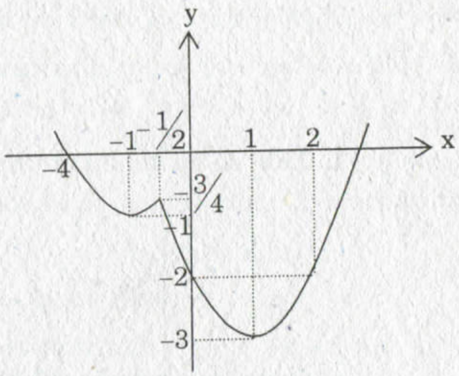


Bài 20. Khảo sát hàm số $y = x^2 - |1 + 2x| - 1$

✶ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 19

Đáp số : Đồ thị.



Bài 21.

a) Khảo sát số $y = x^2 - 4x + 3$.

b) Suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$

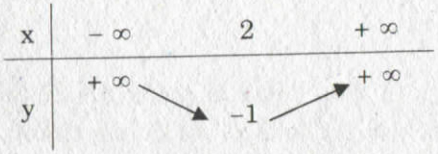
✶ ***Hướng dẫn***

- Hàm số bậc hai : $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$
- $|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x \leq 0 \end{cases}$ và $|-x| = |x|, \forall x \in R$

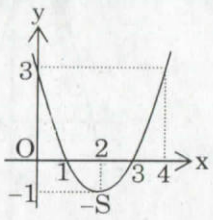
GIẢI

a) Khảo sát hàm số $y = x^2 - 4x + 3$

- Tập xác định $D = R$ $\quad x = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow y = -1$.
- Bảng biến thiên



- Đồ thị là parabol có đỉnh S(2; – 1), trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$, cắt trục Oy tại điểm (0; 3) và cắt trục Ox tại hai điểm : (1 ; 0) và (3 ; 0)



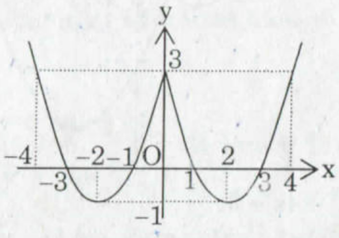
b) **Suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$**

Đặt $y_1 = x^2 - 4x + 3$ (đã vẽ đồ thị)

$y_2 = x^2 - 4|x| + 3 = f(x)$

- $x \ge 0 \Leftrightarrow |x| = x \Leftrightarrow y_2 = y_1$, vậy đồ thị hàm số $y_2 \equiv$ đồ thị hàm số y_1 khi $x \ge 0$
- $f(-x) = (-x)^2 - 4|-x| + 3 = x^2 - 4|x| + 3 = f(x)$

Vậy hàm số y_2 là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số y_2 đối xứng nhau qua trục tung.



Bài 22.

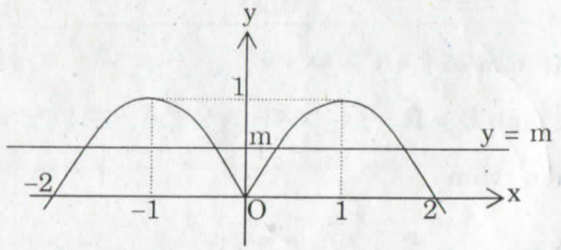
a) **Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 - 2x$.**

Suy ra đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2|x|$.

b) **Tìm m để phương trình $x^2 - 2|x| + m = 0$ (*) có đúng bốn nghiệm.**

★ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 21 (chú ý : $x \le 0 \Leftrightarrow |x| = -x$)



Đáp số : (câu b) **(0 < m < 1)**

Phương trình (*) $\Leftrightarrow m = -x^2 + 2|x|$: đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2|x|$ và đường thẳng $y = m$

Bài 23. Tìm trên đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 4x$ hai điểm A và B sao cho AB cùng phương với trục hoành và độ dài đoạn thẳng AB = 6.

★ ***Hướng dẫn***

- AB cùng phương với Ox nên $y_A = y_B = m$: $A(x_1 ; m)$, $B(x_2 ; m)$
- A, B ∈ (P) nên $m = -x_1^2 + 4x_1$, $m = -x_2^2 + 4x_2$

  $\Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm phương trình $m = -x^2 + 4x$ hay $x^2 - 4x + m = 0$.
- $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (m - m)^2 = \ldots\ldots$ (dùng định lí Viét đối với phương trình bậc hai)

GIẢI

- Vì AB cùng phương với Ox nên $y_A = y_B = m$: $A(x_1 ; m)$, $B(x_2 ; m)$
- A, B ∈ (P) nên $m = -x_1^2 + 4x_1$ và $m = -x_2^2 + 4x_2$

$\Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm phương trình $m = -x^2 + 4x$ hay $x^2 - 4x + m = 0$ (*)

- Điều kiện để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là $\Delta' = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$
- Ta có $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (m - m)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2$

  Mà x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*) nên :

  $$x_1 + x_2 = 4 \text{ và } x_1.x_2 = m.$$

  Vậy $AB^2 = 16 - 4m = 36$ (vì AB = 6) $\Leftrightarrow m = -5 < 4$

– Thay $m = -5$ vào phương trình (*) : $x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \lor x = 5$

Đáp số : A(–1; – 5) và B(5; – 5)

Bài 24. Cho hàm số $y = x^2 + 4x + 2$ có đồ thị (P). Tìm hai điểm M và N trên (P) sao cho MN song song với trục hoành và MN = 4.

★ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 23.

Đáp số : M(0; 2) và N(– 4; 2)

Bài 25.

a) **Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + 4x + 3$.**

b) **S là đỉnh của (P). Tìm được hay không được điểm B ∈ (P) sao cho S và B đối xứng nhau qua điểm A(-3; 1)**

★ ***Hướng dẫn***

b) A là trung điểm SB nên : $\begin{cases} x_A = \dfrac{x_S + x_B}{2} \\ y_A = \dfrac{y_S + y_B}{2} \end{cases}$

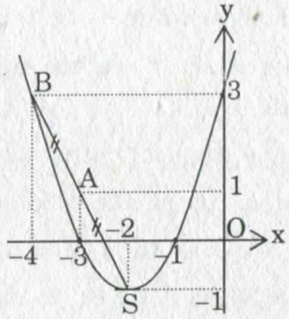
GIẢI

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + 4x + 3$

- D = R $\qquad x = -\dfrac{b}{2a} = -2 \Rightarrow y = -1$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

- Đồ thị là parabol (P) có đỉnh S(– 2; – 1), trục đối xứng x = – 2, cắt các trục tọa độ tại (0; 3), (– 1; 0), (– 3; 0)



b) B(x_B; y_B) và S(– 2; – 1) đối xứng nhau A(– 3; 1) nên A là trung điểm đoạn thẳng SB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{x_S + x_B}{2} \\ y_A = \dfrac{y_S + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_A - x_S = -4 \\ y_B = 2y_A - y_S = 3 \end{cases} \qquad \text{Vậy } B(-4; 3)$$

Ta thấy $3 = (-4)^2 + 4(-4) + 3$ hay $y_B = x_B^2 + 4x_B + 3 \Rightarrow B \in (P)$

Đáp số : B(– 4; 3) thỏa mãn bài toán.

Bài 26.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 - 4x$.

b) Gọi S là điểm cực đại của (P). Tìm điểm M ∈ (P) sao cho I(– 3; 2) là trung điểm đoạn thẳng SM.

★ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 26.

Đáp số : M(– 4; 0)

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai parabol :

$(P_1) : y = \dfrac{x^2 - 2x - 5}{3}$ có đỉnh S_1.

$(P_2) : y = \dfrac{-x^2 + 2x + 11}{3}$ có đỉnh S_2.

Gọi A và B là giao điểm của (P_1) và (P_2).

Chứng minh rằng A, B, S_1, S_2 là bốn đỉnh của một hình vuông.

★ ***Hướng dẫn***

- Tìm tọa độ S_1 và S_2 $\left[\text{Dùng công thức } S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)\right]$
- Tìm tọa độ A và B : Giải hệ phương trình $\begin{cases}(P_1) \\ (P_2)\end{cases}$
- Chứng minh tứ giác AS_1BS_2 có hai đường chéo AB và S_1S_2 : bằng nhau, vuông góc nhau, có chung một trung điểm.

GIẢI

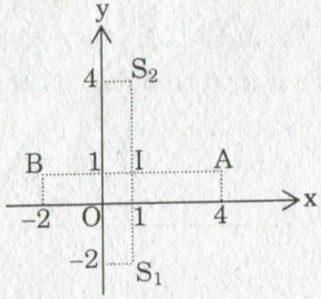
Dùng công thức $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ (đỉnh của (P) : $y = ax^2 + bx + c$)

- Ta có $S_1(1; -2)$ và $S_2(1; 4)$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} (P_1) : y = \dfrac{x^2 - 2x - 5}{3} \\ (P_2) : y = \dfrac{-x^2 + 2x + 11}{3} \end{cases}$

Ta có : $x^2 - 2x - 5 = -x^2 + 2x + 11 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow y = 1$$

Vậy giao điểm của (P_1) và (P_2) là A(4 ; 1), B(– 2 ; 1)



Ta thấy :

- $AB = S_1S_2 = 6$ (1)
- $AB \perp S_1S_2$ (2)
- AB và S_1S_2 có chung một trung điểm là I(1 ; 1) (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow AS_1BS_2$ là hình vuông.

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai parabol $\begin{cases} (P_1): y = \dfrac{x^2 + 4x}{4} \\ (P_2): y = \dfrac{-x^2 - 4x}{4} \end{cases}$

Chứng minh rằng hai đỉnh của (P_1) và (P_2) cùng với hai giao điểm của (P_1) và (P_2) tạo thành một hình thoi.

★ *Hướng dẫn* Giải giống bài 27

Đáp số : $S_1(-2; -1)$, $S_2(-2; 1)$, $A(-4; 0)$, $O(0; 0)$

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai parabol :

$$\begin{cases} (P_1): y = x^2 - 2mx + m^2 + 2 \\ (P_2): y = -x^2 - 6mx - 9m^2 + 2 \end{cases}$$

a) **Chứng minh rằng các đỉnh S_1 và S_2 của (P_1) và (P_2) cùng ở trên một đường thẳng cố định.**

b) **Xác định m để S_1, S_2 và $O(0; 0)$, $A(0; 4)$ là bốn đỉnh của một hình thang cân đáy OA và S_1S_2 nhưng không phải là hình chữ nhật.**

★ *Hướng dẫn*

- Tìm tọa độ S_1, S_2 ta sẽ thấy kết quả.
- Trung trực của đoạn thẳng OA cắt đường thẳng (S_1S_2) tại I, đề bài thỏa mãn khi I là trung điểm của S_1S_2 đồng thời $S_1S_2 \neq OA$

GIẢI

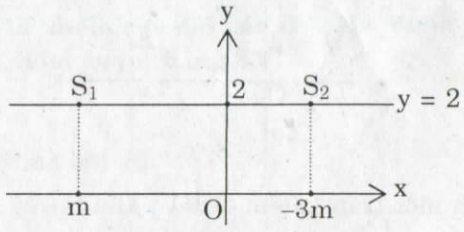
Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có hoành độ đỉnh là $x = -\dfrac{b}{2a}$

a) $(P_1) : y = x^2 - 2mx + m^2 + 2$ có đỉnh $S_1(m; 2)$

$(P_2) : y = -x^2 - 6mx - 9m^2 + 2$ có đỉnh $S_2(-3m; 2)$

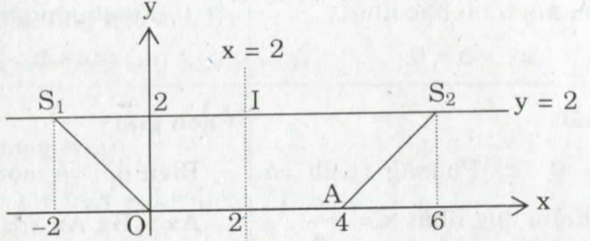
Ta thấy $y_{S_1} = y_{S_2} = 2$

$\Rightarrow$ S_1 và S_2 cùng ở trên đường thẳng cố định $y = 2$ (đpcm)



b) Đường thẳng trung trực của đoạn OA $(x = 2)$ cắt đường thẳng (S_1S_2) tại $I(2; 2)$.

S_1, S_2, O và A tạo thành một hình thang cân (đáy OA và S_1S_2) nhưng không phải hình chữ nhật $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I là trung điểm } S_1S_2 \quad (1) \\ S_1S_2 \neq OA \quad (2) \end{cases}$



- Từ (1) ta có $x_I = \dfrac{1}{2}\left(x_{S_1} + x_{S_2}\right) \Leftrightarrow 2 = \dfrac{1}{2}(m - 3m) = -m \Leftrightarrow m = -2$
- Với $m = -2$, ta có : $S_1(-2 ; 2)$ và $S_2(6 ; 2) \Rightarrow S_1S_2 = 8$

$\Rightarrow S_1S_2 \neq OA$ (vì $OA = 4$).

Đáp số : $m = -2$.

Bài 30.

a) **Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + 4x - 5$.**

b) **(P) cắt trục hoành tại A và B ($x_A < 0$). Đường thẳng $y = -5$ cắt (P) tại C và D ($x_D < 0$). Chứng minh rằng ABCD lậ hình thang cân.**

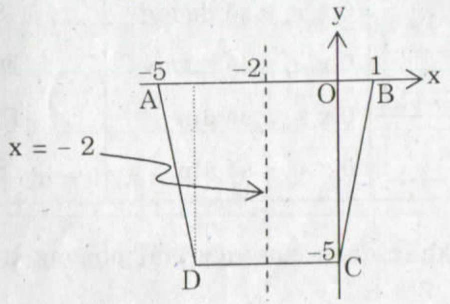
★ *Hướng dẫn*

- Tìm tọa độ A và B (giải phương trình $x^2 + 4x - 5 = 0$)
- Tìm tọa độ C và D (giải phương trình $x^2 + 4x - 5 = -5$)

Chứng minh AB và CD có chung một đường trung trực và $AB \neq CD$.

Đáp số : $A(-5; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; -5)$, $D(-4; -5)$.

Phương trình đường trung trực chung của AB và CD là $x = -2$.



Chuyên đề 2

Phương trình và bất phương trình bậc nhất một ẩn

Phương trình bậc nhất :

$ax + b = 0$

Cách giải

* $a \neq 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

* $a = 0$, ta có phương trình :

$$0.x + b = 0$$

- Nếu $b = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm $x \in R$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của phương trình là $S = R$

- Nếu $b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của phương trình là $S = \varnothing$

Tóm tắt :

a	b	Tập nghiệm
$a \neq 0$	Tùy ý	$S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$
$a = 0$	$b = 0$	$S = R$
	$b \neq 0$	$S = \varnothing$

Bất phương trình bậc nhất :

$ax + b >, \geq, <, \leq 0$

Cách giải

Biến đổi về một trong bốn dạng :

$Ax > B$; $Ax \geq B$; $Ax < B$; $Ax \leq B$

* Xét $A > 0$, $A < 0$.

Chia hai vế của bất phương trình cho A

(**chú ý** : chia hai vế cho số dương thì bất phương trình không đổi chiều, chia hai vế cho số âm thì bất phương trình đổi chiều).

* $A = 0$ lúc đó bất phương trình trở thành $0.x > B$, $0.x \geq B$, $0.x < B$, $0.x \leq B$.

- Tùy theo dấu của B và dấu bất đẳng thức ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = R$ hoặc $S = \varnothing$

Mệnh đề	Chân trị
$0.x >, < 0$	Sai
$0.x \geq, \leq 0$	Đúng
$0.x >, \geq$ số dương	Sai
$0.x <, \leq$ số dương	Đúng
$0.x >, \geq$ số âm	Đúng
$0.x <, \leq$ số âm	Sai

(Học sinh cần phân biệt sự khác nhau của việc giải phương trình và bất phương trình bậc nhất)

Bài 31. Tùy theo m, giải và biện luận phương trình :

$$(x - 1)^2 + m^2x + 3 = (m + 1)^2 + x^2 - x \quad (1)$$

★ ***Hướng dẫn***

♦ Biến đổi phương trình về dạng $Ax = B$ rồi xét hai trường hợp :

- $A = 0$ (lúc đó không cần xét B)
- $A \neq 0$ (lúc đó xét B ($B = 0$ hay $B \neq 0$)

GIẢI

- Biến đổi phương trình

$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + m^2x + 3 = (m + 1)^2 + x^2 - x$

$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x = (m + 1)^2 - 4 \Leftrightarrow \mathbf{(m - 1)(m + 1)x = (m - 1)(m + 3)}$ (*)

- **Trường hợp 1:** $(m - 1)(m + 1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

  Lúc đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{m + 3}{m + 1}$.

- **Trường hợp 2:** $(m - 1)(m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

– Với $m = 1$ thì phương trình (*) trở thành $0.x = 0$: có nghiệm $x \in R$ (vô số nghiệm)

– Với $m = -1$ thì phương trình (*) trở thành $0.x = -4$: vô nghiệm

Tóm tắt

m	Tập nghiệm của phương trình
$m \neq \pm 1$	$S = \left\{\frac{m + 3}{m + 1}\right\}$
$m = 1$	$S = R$
$m = -1$	$S = \varnothing$

Bài 32. Giải và biện luận theo m phương trình $\frac{m^2(x - 2) + (x + m)^2 + 8}{x^2 + 4} = 1$

★ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 31 ta có : $\mathbf{m(m + 2)x = (m + 2)(m - 2)}$

m	Tập nghiệm của phương trình
$m \neq 0$ và $m \neq -2$	$S = \left\{\frac{m - 2}{m}\right\}$
$m = 0$	$S = \varnothing$
$m = -2$	$S = R$

Bài 33. Cho phương trình $(2m - x)^2 + (1 - m)^2 = (x - m)^2 + (1 - x)$ (1)

Xác định m để phương trình có nghiệm x thỏa mãn điều kiện $-1 < x < 0$.

✶ ***Hướng dẫn***

- Biến đổi phương trình đã cho về dạng Ax = B rồi tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.
- Tính nghiệm x theo m rồi cho $-1 < x < 0$.

Cần nhớ: *Phương trình Ax = B có nghiệm* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \neq 0 \\ A = B = 0 \end{array}\right.$

GIẢI

Biến đổi phương trình (1)

(1) $\Leftrightarrow 4m^2 - 4mx + x^2 + 1 - 2m + m^2 = x^2 - 2mx + m^2 + 1 - x$

$\Leftrightarrow (1 - 2m)x = 2m(1 - 2m)$ (*)

- $1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$, lúc đó phương trình (*) trở thành $0.x = 0$ có nghiệm $x \in R$ nên có nghiệm $x \in (-1; 0)$
- $1 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$, lúc đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2m$, do đó $-1 < x < 0 \Leftrightarrow -1 < 2m < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$

Đáp số : Đề bài thỏa mãn $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \vee -\frac{1}{2} < m < 0$.

Bài 34. Cho phương trình $(x - 1)(m^2 - m + 1) = m^3 + 1$ (*).

a) Chứng minh rằng phương trình (*) luôn có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình tương ứng với hai giá trị m_1 và m_2 của m.

Chứng minh rằng $(m_1 + m_2) = 2m_1.m_2 \Leftrightarrow 5(x_1 + x_2) - 2x_1.x_2 = 12$.

✶ ***Hướng dẫn***

a) Biến đổi phương trình đã cho về dạng Ax = B rồi chứng minh $A \neq 0$, $\forall m$ [Công thức : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$]

b) Tính m_1 theo x_1 và m_2 theo x_2, sau đó biến đổi $(m_1 + m_2) = 2m_1.m_2$ ⇔ ....

GIẢI

a) Phương trình (*) $\Leftrightarrow (x - 1)(m^2 - m + 1) = (m + 1)(m^2 - m + 1)$

Vì $m^2 - m + 1 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall$ m nên phương trình đã cho

$\Leftrightarrow x - 1 = m + 1 \Leftrightarrow x = m + 2$. Vậy phương trình đã cho cho luôn có nghiệm $x = m + 2$.

Chú ý :

$m^2 - m + 1 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall m \in R$ nên $m^2 - m + 1 \neq 0$, $\forall m \in R$

b) Theo đề bài ta có $x_1 = m_1 + 2$ và $x_2 = m_2 + 2$

$\Leftrightarrow m_1 = x_1 - 2$ và $m_2 = x_2 - 2$

Ta có : $\begin{cases} m_1 + m_2 = (x_1 + x_2) - 4 \\ m_1.m_2 = (x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1.x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \end{cases}$

Vậy $(m_1 + m_2) = 2m_1.m_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) - 4 = 2[x_1.x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4] = 0$

$\Leftrightarrow 5(x_1 + x_2) - 2x_1.x_2 = 12$ (đpcm)

Bài 35. Cho phương trình $(x + m)^2 + 6(\frac{5}{3}m + 1) = 5(m + 1)^2 + x(x - 1)$

a) Xác định m để phương trình có tập nghiệm $S \neq R$ và $S \neq \varnothing$.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình ứng với hai giá trị m_1, m_2 của m ($m_1, m_2 \neq -\frac{1}{2}$). Tính $P = x_1^2 + x_2^2$ theo $m_1.m_2$ biết $m_1 + m_2 = -2$

✶ **Hướng dẫn**

a) Biến đổi phương trình đã cho về dạng Ax = B rồi cho $A \neq 0$.

b) Tính x_1 theo m_1 và x_2 theo m_2 rồi tính $P = x_1^2 + x_2^2$

(Chú ý : $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$).

GIẢI

a) Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + m^2 + 10m + 6 = 5(m^2 + 2m + 1) + x^2 - x$

$\Leftrightarrow (2m + 1)x = 4m^2 - 1 = (2m + 1)(2m - 1)$

Phương trình có tập nghiệm $S \neq R$ và $S \neq \varnothing$ (nghĩa là phương trình đã cho có đúng một nghiệm)

$\Leftrightarrow 2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}$, lúc đó nghiệm của phương trình là :

$x = 2m - 1 \Leftrightarrow$ Tập nghiệm của phương trình là $S = \{2m - 1\}$

b) Theo đề bài ta có : $\begin{cases} x_1 = 2m_1 - 1 \\ x_2 = 2m_2 - 1 \end{cases}$

Ta có : $P = x_1^2 + x_2^2 = (2m_1 - 1)^2 + (2m_2 - 1)^2$

$= 4\left(m_1^2 + m_2^2\right) - 4(m_1 + m_2) + 2$

$= 4[(m_1 + m_2)^2 - 2m_1.m_2] - 4(m_1 + m_2) + 2$

$= 4(4 - 2m_1.m_2) - 4(-2) + 2 = 26 - 8m_1.m_2$.

Bài 36. Giải và biện luận theo m bất phương trình :

$$(x + 1)^2 - (m + 1)^2 > x(x + m) - 2(m + 2) \quad (1)$$

✶ ***Hướng dẫn***

- Biến đổi bất phương trình đã cho về dạng Ax > B rồi xét ba trường hợp : A > 0, A < 0, A = 0.

GIẢI

- Biến đổi : (1) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - (m^2 + 2m + 1) > x^2 + mx - 2m - 4$

$\Leftrightarrow (2 - m)x > m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2)$

$\Leftrightarrow$ **$(2 - m)x > -(2 - m)(m + 2)$** (*)

- Biện luận.

♦ $2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$: bất phương trình có nghiệm $x > -(m + 2)$

♦ $2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$: bất phương trình có nghiệm $x < -(m + 2)$

♦ $2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$: bất phương trình (*) trở thành $0.x > 0$: vô nghiệm

Tóm tắt

m	Bất phương trình đã cho có tập nghiệm
$m < 2$	$S = (-(m + 2); +\infty)$
$m > 2$	$S = (-\infty; -(m + 2))$
$m = 2$	$S = \varnothing$

Bài 37. Tùy theo a, giải và biện luận bất phương trình :

$$2(a - 1) + (x + 1)^2 \le a^2(1 - x) + 3(a - 1 + x) + x^2 \quad (1)$$

✶ ***Hướng dẫn***

Biến đổi bất phương trình (1) về dạng $Ax \le B$ rồi xét ba trường hợp: A > 0, A < 0, A = 0.

GIẢI

* Biến đổi bất phương trình

(1) $\Leftrightarrow 2a - 2 + x^2 + 2x + 1 \le a^2 - a^2x + 3a - 3 + 3x + x^2$

$\Leftrightarrow (a^2 - 1)x \le a^2 + a - 2$

$\Leftrightarrow$ **$(a - 1)(a + 1)x \le (a - 1)(a + 2)$** (*)

♦ **Trường hợp 1 :** $a^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |a| > 1$, lúc đó bất phương trình (*) có nghiệm $x \le \dfrac{a + 2}{a + 1}$

♦ **Trường hợp 2 :** $a^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |a| < 1$, lúc đó bất phương trình (*) có nghiệm $x \ge \dfrac{a + 2}{a + 1}$

♦ **Trường hợp 3 :** $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

- Với a = 1 thì bất phương trình (*) trở thành : $0.x \le 0$ có nghiệm $x \in R$.
- Với a = − 1 thì bất phương trình (*) trở thành : $0.x \le -2$: vô nghiệm

Tóm tắt

a	Tập nghiệm của bất phương trình
$\lvert a\rvert > 1$	$S = \left(-\infty; \dfrac{a + 2}{a + 1}\right]$
$\lvert a\rvert < 1$	$S = \left[\dfrac{a + 2}{a + 1}; +\infty\right)$
$a = 1$	$S = R$
$a = -1$	$S = \varnothing$

Bài 38. Tùy theo a, giải và biện luận bất phương trình :

$$(x + 3)^2 - 3(a + 3) > a^2(x - 1) - x(3 - x) \quad (*)$$

✶ ***Hướng dẫn***

Biến đổi bất phương trình về dạng Ax > B rồi tiếp tục giải giống bài 36, 37.

Đáp số :

a	Tập nghiệm của bất phương trình (*)
$\lvert a\rvert < 3$	$S = \left(\dfrac{a}{3 + a}; +\infty\right)$
$\lvert a\rvert > 3$	$S = \left(-\infty; \dfrac{a}{3 + a}\right)$
$a = 3$	$S = \varnothing$
$a = -3$	$S = R$

Bài 39. Xác định m để phương trình $4x - 3m - 2 = m^2(x - 1) - 4$ vô nghiệm.

★ ***Hướng dẫn***

Biến đổi phương trình về dạng $Ax = B$ rồi cho $A = 0$ và $B \neq 0$

GIẢI

- Biến đổi phương trình đã cho $\Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m^2 - 3m + 2$

$\Leftrightarrow$ **$(m - 2)(m + 2)x = (m - 1)(m - 2)$ (*)**

- Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}(m-2)(m+2) = 0\\(m-1)(m-2) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m = -2$

Bài 40. Xác định a để bất phương trình :

$ax(a - 1) + x^2 \geq (a - 1)^2 + (x + 1)^2 - 3 + 2a$ vô nghiệm.

★ ***Hướng dẫn***

- Bất phương trình đã cho

$\Leftrightarrow a^2x - ax + x^2 \geq a^2 - 2a + 1 + x^2 + 2x + 1 - 3 + 2a$

$\Leftrightarrow (a^2 - a - 2)x \geq a^2 - 1 \Leftrightarrow$ **$(a + 1)(a - 2)x \geq (a - 1)(a + 1)$**

- Bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}(a+1)(a-2) = 0 & \text{(i)}\\(a-1)(a+1) > 0 & \text{(ii)}\end{cases}$

– Với (i) ta có : $\left[\begin{array}{l}a = -1 \Rightarrow \text{(ii) sai}\\a = 2 \Rightarrow \text{(ii) đúng}\end{array}\right.$ **Đáp số :** $a = 2$

Bài 41. Cho phương trình $2(|x| + m + 1) = m|x| + m^2 + 3$ (1)

Xác định m để phương trình (1) có nghiệm.

★ **Hướng dẫn**

Biến đổi phương trình đã cho $\Leftrightarrow (2 - m)|x| = (\dots\dots\dots)^2$

Đáp số : Phương trình đã cho có nghiệm : $2 - m > 0$ hoặc .... $= 0$

Bài 42. Xác định a để bất phương trình sau có tập nghiệm S = R :

$a^2(x - 1) + (x - 2)^2 < 5(2 - a) + x^2$ (*)

★ ***Hướng dẫn***

- (*) $\Leftrightarrow$ **$(a - 2)(a + 2)x < (\dots\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots\dots)$**
- Bất phương trình (*) có tập nghiệm S = R $\Leftrightarrow \begin{cases}(a-2)(a+2) = 0\\(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots) > 0\end{cases}$

Đáp số : $a = -2$

Chuyên đề 3

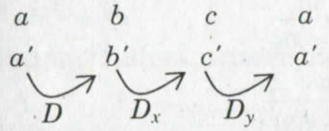
HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

- **Dạng** $\begin{cases}ax + by + c = 0\\a'x + b'y + c' = 0\end{cases}$ (a và b, a' và b' không đồng thời triệt tiêu)

- **Các định thức**

$$D = \begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix} = ab' - a'b,\ D_x = \begin{vmatrix}b & c\\b' & c'\end{vmatrix} = bc' - b'c,\ D_y = \begin{vmatrix}c & a\\c' & a'\end{vmatrix} = ca' - c'a$$

Cách nhớ



GIẢI

D	D_x, D_y	Hệ phương trình
$D \neq 0$	Tùy ý	Có nghiệm duy nhất (x; y) $\begin{cases}x = \dfrac{D_x}{D}\\y = \dfrac{D_y}{D}\end{cases}$
$D = 0$	$D_x \neq 0$ hay $D_y \neq 0$	Vô nghiệm
	$D_x = D_y = 0$	Có vô số nghiệm (x ; y) với $x \in R$ và $ax + by + c = 0$ hoặc $y \in R$ và $ax + by + c = 0$

Bài 43. Tùy theo m, giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases}mx - y - m + 2 = 0\\x - my = -m\end{cases}.$$

★ **Hướng dẫn**

- Lập các định thức D, D_x, D_y.
- Xét hai trường hợp : $D \neq 0$, $D = 0$

GIẢI

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}mx - y - m + 2 = 0\\x - my + m = 0\end{cases}$

- Các định thức

$$\begin{array}{ccccccc} m & & -1 & & -m+2 & & m \\ 1 & & -m & & m & & 1 \\ & D & & D_x & & D_y & \end{array}$$

- Ta có : $\begin{cases} D = 1 - m^2 = (1-m)(1+m) \\ D_x = -m^2 + m = m(1-m) \\ D_y = -m^2 - m + 2 = (1-m)(m+2) \end{cases}$

- Biện luận

  ♦ **Trường hợp 1 :** $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m}{1+m} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m+2}{1+m} \end{cases}$

  ♦ **Trường hợp 2 :** $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

– Với $m = 1 \Rightarrow D_x = D_y = 0 \Rightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm $(x\,;\,y)$ với $x \in R$ và $y = x + 1$ hoặc $y \in R$ và $x = y - 1$

– Với $m = -1 \Rightarrow D_x \neq 0 \Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm

Tóm tắt

m	Tập nghiệm của hệ phương trình
$m \neq \pm 1$	$S = \left\{\dfrac{m}{1+m} ; \dfrac{m+2}{1+m}\right\}$
$m = 1$	$S = \{(x\,;\,y)/x \in R$ và $y = x + 1\}$ hoặc $S = \{(x\,;\,y)/y \in R$ và $x = y - 1\}$
$m = -1$	$S = \varnothing$

Bài 44. Tùy theo a, giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} 6ax + (2-a)y = 3 \\ (a-1)x - ay = 2 \end{cases}$

★ ***Hướng dẫn***

- Hệ phương trình $\begin{cases} 6ax + (2-a)y - 3 = 0 \\ \text{..............................} = 0 \end{cases}$
- $D = (a+1)(2-5a)$; $D_x = -(a+4)$; $D_y = 3(1+3a)$

  Biện luận

♦ Trường hợp 1 : $D \neq 0$ (không xét D_x, D_y)

♦ Trường hợp 2 : $D = 0$ (xét D_x, D_y)

Bài 45. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (k+1)x + (3k+1)y + k - 2 = 0 \\ 2x + (k+2)y - 4 = 0 \end{cases}$

a) Xác định k để hệ phương trình có nghiệm.

b) Khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x; y) tính k để x, y ∈ Z

Cần nhớ : *Hệ phương trình* $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ *có nghiệm* $\left[\begin{array}{l} D \neq 0 \\ \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

★ ***Hướng dẫn***

* Tính D, D_x, D_y

a) Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow D \neq 0$ hoặc $D = D_x = D_y = 0$

b) $D \neq 0$ ta có : $\begin{cases} x = \text{...........} \\ y = \text{...........} \end{cases}$ từ đó xác định k để $x, y \in Z$

GIẢI

a) (Vắn tắt) $D = k(k-3)$, $D_x = -k(k+12)$, $D_y = 6k$

Đáp số : $\left[\begin{array}{l} k \neq 0 \text{ và } k \neq 3 \\ k = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow k \neq 3$

b) Khi $k \neq 0$ và $k \neq 3$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x; y)

với : $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-k(k+12)}{k(k-3)} = -\left(\dfrac{k+12}{k-3}\right) = -\left(\dfrac{k-3+15}{k-3}\right) = -\left(1 + \dfrac{15}{k-3}\right) \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{6k}{k(k-3)} = \dfrac{6}{k-3} \end{cases}$

- x nguyên $\Leftrightarrow 15 \vdots (k-3) \Leftrightarrow |k-3| \in \{1, 3, 5, 15\}$
- y nguyên $\Leftrightarrow 6 \vdots (k-3) \Leftrightarrow |k-3| \in \{1, 2, 3, 6\}$

  Vậy x và y nguyên $\Leftrightarrow |k-3| \in \{1, 3\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k - 3 = \pm 1 \\ k - 3 = \pm 3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow k = 4 \vee k = 2 \vee k = 6 \vee k = 0$ (loại)

Đáp số :

- $k = 4 \Rightarrow x = -16$ và $y = 6$
- $k = 2 \Rightarrow x = 14$ và $y = -6$
- $k = 6 \Rightarrow x = -6$ và $y = 2$
- $k = 0$ (loại)

Bài 46. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + y - 2a = 0 \\ x + ay - (a+1) = 0 \end{cases}$

a) Xác định a để hệ phương trình có nghiệm.

b) Có giá trị nào của a để hệ phương trình có nghiệm (x; y) = (– 2; 3) không ? Giải thích ?

Cần nhớ : *Hệ phương trình* $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ *có nghiệm* $\left[\begin{array}{l} D \neq 0 \\ \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

✶ *Hướng dẫn*

- Tính $D = (a-1)(a+1)$, $D_x = (a-1)(\text{.........})$, $D_y = \text{...........}(a-1)$

a) Hệ phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D \neq 0 \\ D = D_x = D_y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{......} \\ \text{......} \end{array}\right. \Leftrightarrow a \neq -1$$

b) Điều kiện : a ≠ ± 1, lúc đó $(x; y) = \left(\dfrac{2a+1}{a+1}; \dfrac{a}{a+1}\right) = (-2\ ;\ 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2a+1}{a+1} = -2 \\ \dfrac{a}{a+1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \text{.........} \\ a = \text{.........} \end{cases} \quad (!)$$

Bài 47. Chứng minh rằng nếu hai phương trình

$x^2 + p_1x + q_1 = 0$ và $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ có nghiệm chung thì

$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) = 0$ (*)

Cần nhớ : *Hệ phương trình* $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ *có nghiệm* $\left[\begin{array}{l} D \neq 0 \\ \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

✶ *Hướng dẫn*

- Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, đặt $y_0 = x_0^2$ ta sẽ có hệ phương trình hai ẩn là $(x_0; y_0)$.
- Tính D, D_{x_0}, D_{y_0} rồi cho hệ phương trình có nghiệm.

GIẢI

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, ta có :

$$\begin{cases} x_0^2 + p_1x_0 + q_1 = 0 \\ x_0^2 + p_2x_0 + q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1x_0 + y_0 + q_1 = 0 \\ p_2x_0 + y_0 + q_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

[với $y_0 = x_0^2$ $(y_0 \geq 0)$]

- Đặt $D = p_1 - p_2$, $D_x = -(q_1 - q_2)$, $D_y = -(p_1q_2 - p_2q_1)$.
- Theo giả thiết thì hai phương trình có nghiệm chung x_0 nên hệ phương trình (*) có nghiệm $(x_0\ ;\ y_0)$, do đó :

– Hoặc $D = D_x = D_y = 0 \Rightarrow$ (*) đúng

– Hoặc $D \neq 0 \Leftrightarrow p_1 \neq p_2$, lúc đó ta có :

$$x_0 = -\left(\frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}\right) \text{ và } y_0 = -\left(\frac{p_1q_2 - p_2q_1}{p_1 - p_2}\right)$$

Mà $y_0 = x_0^2$ nên : $-\left(\dfrac{p_1q_2 - p_2q_1}{p_1 - p_2}\right) = \dfrac{(q_1 - q_2)^2}{(p_1 - p_2)^2}$

$\Leftrightarrow (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) = 0$ (đpcm)

Bài 48. Biết hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ bx + cy = a & (2) \\ cx + ay = b & (3) \end{cases}$ **có nghiệm (x ; y).**

Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

✶ *Hướng dẫn*

Từ (1), (2) và (3) ta có : $\begin{cases} c^3 = ac^2x + bc^2 & (4) \\ a^3 = \text{................} & (5) \\ b^3 = \text{................} & (6) \end{cases}$

Cộng (4), (5), và (6), ta có :

$a^3 + b^3 + c^3 = \text{..........................} = ab(\text{.............}) + bc(\text{.............}) + ca(\text{...............})$

Bài 49. Cho hệ phương trình $\begin{cases} kx + 2y - (k+1) = 0 \\ 2x + ky - (2k+5) = 0 \end{cases}$

Xác định k để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x ; y).

Trong trường hợp này, tìm hệ thức giữa x và y độc lập với k.

★ ***Hướng dẫn***

- Tính D, D_x, D_y.
- Cho $D \neq 0$

Đáp số : $k \neq \pm 2$

Ta có $\begin{cases} x = \dfrac{k-5}{k-2} = 1 - \dfrac{3}{k-2} \\ y = \dfrac{2k-1}{k-2} = 2 + \dfrac{3}{k-2} \end{cases} \Rightarrow x + y = \text{..........}$ (đpcm)

Bài 50. Chứng minh hệ phương trình : $\begin{cases} \mathbf{ax - y - 2a + 1 = 0} \\ \mathbf{3x + (a-2)y + a - 3 = 0} \end{cases}$ **luôn có nghiệm.**

★ ***Hướng dẫn***

Tính $D = a^2 - 2a + 3 = (\text{.........})^2 + 2 \neq 0 \quad \forall a \in R$.

Chuyên đề 4 BẤT ĐẲNG THỨC

Kiến thức cơ bản

1) Tính chất

a) $a > b \Leftrightarrow b < a$

b) $a > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\ a \pm x > b \pm x,\ \forall x \in R \\ 2)\ a.x > b.x\ ;\ \dfrac{a}{x} > \dfrac{b}{x} \text{ nếu } x > 0 \\ 3)\ a.x < b.x\ ;\ \dfrac{a}{x} < \dfrac{b}{x} \text{ nếu } x < 0 \end{array}\right.$

Hệ quả $a > b \Leftrightarrow -a < -b$

c) $a > b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \text{ nếu } ab > 0 \\ \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \text{ nếu } ab < 0 \end{array}\right.$

d) $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$

e) $a > b \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} a^n > b^n & (n \in N^*) \\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} & (n \in N^*) \end{array}\right.$

2) Phép nhân

$\left.\begin{array}{l} a > x \geq 0 \\ b > y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ab > xy$

Hệ quả 1 $\left.\begin{array}{l} a < x \leq 0 \\ b < y \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ab > xy$

Hệ quả 2 $a > b \geq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$

$0 \geq a > b \Rightarrow a^2 < b^2$

Chú ý :

- $\begin{cases} a > x \\ b > y \end{cases} \not\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \bullet\ a - b > x - y \\ \bullet\ ab > xy \\ \bullet\ \dfrac{a}{b} > \dfrac{x}{y} \end{array}\right.$
- $a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b| \quad (a^2 > b^2 \not\Rightarrow a > b)$

3) Vài bất đẳng thức thông dụng

a) Với hai số a, b tùy ý ta luôn có $a^2 + b^2 \geq 2ab$

(Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b)

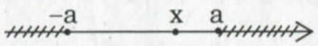
Hệ quả : Với ba số a, b, c tùy ý ta có : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $ab \geq 0$)

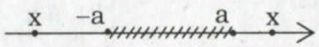
c) $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \geq 2$ với mọi $a \neq 0$

d) Cho a > 0

- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$



- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$



Các phương pháp giải bài toán bất đẳng thức

- Sử dụng các kiến thức cơ bản để chứng minh một bất đẳng thức.
- Sử dụng bất đẳng thức Côsi.
- Ứng dụng dấu "=" xảy ra để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức.
- a, b là hai số tùy ý, ta có : $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (1)
- Phương pháp tương đương.

Muốn chứng minh bất đẳng thức (1) đúng ta có thể tiến hành như sau :

- **Bước 1 :** Tìm bất đẳng thức tương đương.

  Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ bất đẳng thức (2)
- **Bước 2 :** Chứng minh bất đẳng thức (2) đúng, từ đó kết luận bất đẳng thức (1) đúng.

Chú ý :

Bất đẳng thức (2) hoặc dễ thấy đúng, hoặc là bất đẳng thức thường gặp, hoặc đúng nhờ phù hợp với giả thiết.

Bài 51. Chứng minh rằng với năm số a, b, c, d, e bất kì, bao giờ ta cũng có : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

★ *Hướng dẫn*

Tìm bất đẳng thức tương đương bằng cách phân tích a^2 thành $\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}$ sau đó biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng $\left(\dfrac{a}{2} - b\right)^2 + \ldots\ldots \geq 0$

GIẢI

Bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ (1)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ab + d^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ae + e^2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) đúng nên bất đẳng thức (1) đúng (đpcm)

- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a}{2} = b = c = d = e$

Bài 52. Cho $0 < x \leq y \leq z$. Chứng minh rằng :

$$y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{y}(x + z) \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)(x + z)$$

★ *Hướng dẫn*

- Tìm bất đẳng thức tương đương bằng cách ước lược (x + z) ở mỗi vế, sau đó biến đổi bất đẳng thức về dạng $A.B \leq 0$ (2)
- Chứng minh bất đẳng thức (2) đúng bằng cách căn cứ giả thiết.

GIẢI

Ta có : $y\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}\right) + \dfrac{1}{y}(x + z) \leq \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}\right)(x + z)$ (1)

$$\Leftrightarrow y\left(\frac{x + z}{xz}\right) + \frac{1}{y}(x + z) \leq \left(\frac{x + z}{xz}\right)(x + z) \quad (x + z > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{xz} + \frac{1}{y} \leq \frac{x + z}{xz} \Leftrightarrow y^2 + xz \leq y(x + z) \quad (\text{vì } x, y, z > 0)$$

$$\Leftrightarrow y(y - x) - z(y - x) \leq 0 \Leftrightarrow (y - x)(y - z) \leq 0 \quad (2)$$

Theo giả thiết : $0 < x \leq y \leq z$ nên $\begin{cases} y - x \geq 0 \\ y - z \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức (2) đúng

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức (1) đúng (đpcm)

Bài 53. Cho a, b, c là các độ dài các cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

★ *Hướng dẫn*

- a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên : $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ca \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$
- Cộng vế theo vế các đẳng thức tìm được.

GIẢI

a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên :

$$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < ab + ca \quad (1) \\ b^2 < bc + ab \quad (2) \\ c^2 < ca + bc \quad (3) \end{cases}$$

Cộng (1), (2) vế theo vế ta có : $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ (đpcm)

Bài 54. Chứng minh rằng nếu $a_1a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm :

$x^2 + a_1x + b_1 = 0$ (1)

$x^2 + a_2x + b_2 = 0$ (2)

★ ***Hướng dẫn***

- Tính biệt số Δ_1 và Δ_2 của hai phương trình.
- Chứng minh $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$ rồi sử dụng giả thiết.

Chú ý : $a + b \geq 0 \Rightarrow$ Trong hai số a, b có ít nhất một số ≥ 0.

GIẢI

Biệt số của phương trình $\begin{cases} (1): \Delta_1 = a_1^2 - 4b_1 \\ (2): \Delta_2 = a_2^2 - 4b_2 \end{cases}$

Ta có : $\Delta_1 + \Delta_2 = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2) \geq 2a_1a_2 - 4(b_1 + b_2)$

$$= 2[a_1a_2 - 2(b_1 + b_2)] \geq 0$$

Tóm lại : $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$

$\Rightarrow$ Trong số Δ_1 và Δ_2 có ít nhất một số không âm.

$\Rightarrow$ Trong hai phương trình có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Bài 55. Chứng minh rằng nếu : $|x| < 1$, n là số nguyên và $n > 1$ thì ta có bất đẳng thức : $(1 - x)^n + (1 + x)^n < 2^n$

★ ***Hướng dẫn***

- $0 < a < 1$ và $n, p \in N \quad n > p \Rightarrow a^n < a^p$
- Từ giả thiết, chứng minh $0 < \dfrac{1 - x}{2}, \dfrac{1 + x}{2} < 1$
- Sau đó dựa vào kiến thức nói trên để chứng minh bất đẳng thức.

GIẢI

$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 1 - x < 2 \\ 0 < 1 + x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{1 - x}{2} < 1 \\ 0 < \dfrac{1 + x}{2} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1 - x}{2}\right)^n < \left(\dfrac{1 - x}{2}\right)^1 \quad (1) \\ \left(\dfrac{1 + x}{2}\right)^n < \left(\dfrac{1 + x}{2}\right)^1 \quad (2) \end{cases} \quad \text{(vì } n > 1\text{)}$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có :

$$\left(\frac{1 - x}{2}\right)^n + \left(\frac{1 + x}{2}\right)^n < 1 \Leftrightarrow (1 - x)^n + (1 + x)^n < 2^n \text{ (đpcm).}$$

Bài 56. a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng : $abc \geq (a + b - c)(a + c - a)(a + c - b)$

★ ***Hướng dẫn***

Dùng bất đẳng thức $x^2 \geq x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

- Ta sẽ có : $a^2 \geq a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c)$
- Tương tự ta có : $b^2 \geq$ ....; $c^2 \geq$ ....
- Nhân (vế theo vế) các bất đẳng thức trên.

Ta có : $\begin{cases} a^2 \geq a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(c + a - b) \quad (1) \\ b^2 \geq b^2 - (a - c)^2 = (a + b - c)(b + c - a) \quad (2) \\ c^2 \geq c^2 - (a - b)^2 = (c + a - b)(b + c - a) \quad (3) \end{cases}$

Vì $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b > 0$ nên nhân vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta có :

$a^2b^2c^2 \geq (a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2$

$\Leftrightarrow abc \geq (a + b - c).(b + c - a).(c + a - b)$ (đpcm).

Bài 57. Chứng minh rằng nếu ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì ta có : $-\dfrac{1}{2} \leq xy + yz + zx \leq 1$

★ ***Hướng dẫn***

- Chứng minh $xy + yz + zx \geq -\dfrac{1}{2}$ bằng cách chú ý :

  Vế phải $= -\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, sau đó biến đổi bất đẳng thức về dạng $(x + y + z)^2 \geq 0$

- **Chứng minh $xy + yz + zx \le 1$ bằng cách chú ý :**

Vế phải = $1 = x^2 + y^2 + z^2$ (sau đó dùng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \ge 2ab$)

GIẢI

- **Chứng minh $xy + yz + zx \ge -\dfrac{1}{2}$ (1)**

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow xy + yz + zx \ge -\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \ge 0 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 \ge 0$ (2)

Bất đẳng thức (2) đúng nên bất đẳng thức (1) đúng (đpcm).

- **Chứng minh $xy + yz + zx \le 1$ (3)**

Bất đẳng thức (3) $\Leftrightarrow xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2$ (4)

$$\text{Vì } \begin{cases} x^2 + y^2 \ge 2xy \\ y^2 + z^2 \ge 2yz \\ z^2 + x^2 \ge 2zx \end{cases} \text{ nên } 2(x^2 + y^2 + z^2) \ge 2(xy + yz + zx)$$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$

Vậy bất đẳng thức (4) đúng $\Rightarrow$ Bất đẳng thức (3) đúng (đpcm).

Bài 58. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác với $a \le b \le c$ thì $(a + b + c)^2 \le 9bc$.

★ ***Hướng dẫn***

Từ $a \le b \Rightarrow a + b + c \le 2b + c \Rightarrow (a + b + c)^2 \le (2b + c)^2$ (1)

* Chứng minh bất đẳng thức $(2b + c)^2 \le 9bc$ (2)

GIẢI

- Theo giả thiết ta có : a, b, c > 0 và $a \le b$

$\Rightarrow a + b + c \le 2b + c \Rightarrow (a + b + c)^2 \le (2b + c)^2$ (1)

- Xét bất đẳng thức $(2b + c)^2 \le 9bc$ (2) $\Leftrightarrow 4b^2 + c^2 - 5bc \le 0$

$\Leftrightarrow (4b^2 - 4bc) + (c^2 - bc) \le 0 \Leftrightarrow 4b(b - c) - c(b - c) \le 0$

$\Leftrightarrow (b - c)(4b - c) \le 0$ (*)

Theo giả thiết ta có : $a \le b \le c$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - c \le 0 \\ 4b - c = b + b - c + 2b \ge \underbrace{a + b - c}_{+} + 2b > 0 \end{cases}$$

(vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác)

$\Rightarrow$ (*) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (a + b + c)^2 \le 9bc$ (đpcm)

Bài 59.

a) Cho hai số a và b thỏa mãn điều kiện $ab \ge 1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{1 + a^2} + \dfrac{1}{1 + b^2} \ge \dfrac{2}{1 + ab}$ (1)

b) Cho $a \ge 1, b \ge 1, c \ge 1$, chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1 + a^3} + \frac{1}{1 + b^3} + \frac{1}{1 + c^3} \ge \frac{3}{1 + abc}$$

★ ***Hướng dẫn***

a) Biến đổi bất đẳng thức.

(1) $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow (ab - a)^2(a - b)^2 \ge 0$

b) Sử dụng kết quả phần 1 với $\begin{cases} \dfrac{1}{1 + a^3} + \dfrac{1}{1 + b^3} \ge \text{.........} \\ \dfrac{1}{1 + c^3} + \dfrac{1}{1 + abc} \ge \text{........} \end{cases}$

Chú ý : $a \ge 1, b \ge 1, c \ge 1$ nên $ab \ge 1$, ...

GIẢI

a) Chứng minh $\dfrac{1}{1 + a^2} + \dfrac{1}{1 + b^2} \ge \dfrac{2}{1 + ab}$ (1)

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2 + a^2 + b^2}{(1 + a^2)(1 + b^2)} \ge \dfrac{2}{1 + ab}$

$\Leftrightarrow (2 + a^2 + b^2)(1 + ab) \ge 2(1 + a^2)(1 + b^2)$ (vì $ab \ge 1$ nên $1 + ab > 0$)

$\Leftrightarrow 2 + a^2 + b^2 + 2ab + a^3b + ab^3 \ge 2 + 2a^2 + 2b^2 + 2a^2b^2$

$\Leftrightarrow ab(a^2 + b^2 - 2ab) - (a^2 + b^2 - 2ab) \ge 0 \Leftrightarrow ab(a - b)^2 - (a - b)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2(ab - 1) \ge 0$ (*)

$$\text{Vì } \begin{cases} (a - b)^2 \ge 0 \\ ab - 1 \ge 0 \text{ (do giả thiết } ab \ge 1) \end{cases}$$

nên bất đẳng thức (*) đúng $\Rightarrow$ Bất đẳng thức (1) đúng (đpcm).

b) Chứng minh $\dfrac{1}{1 + a^3} + \dfrac{1}{1 + b^3} + \dfrac{1}{1 + c^3} \ge \dfrac{3}{1 + abc}$

Đặt $a^3 = A^2, b^3 = B^2 \Rightarrow AB = \sqrt{a^3b^3}$

Ta có : $A.B \ge 1$ vì $a \ge 1$ và $b \ge 1$

Theo kết quả trên ta có : $\frac{1}{1+A^2} + \frac{1}{1+B^2} \ge \frac{2}{1+AB}$

hay $\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} \ge \frac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}}$ (2)

- Tương tự ta cũng có :

$$\frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \ge \frac{2}{1+\sqrt{c^3abc}} = \frac{2}{1+\sqrt{abc^4}} \quad (3)$$

Cộng (2) và (3) vế theo vế ta có :

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \ge 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \frac{1}{1+\sqrt{abc^4}}\right)$$

Nhưng $\frac{1}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \frac{1}{1+\sqrt{abc^4}} \ge \frac{2}{1+\sqrt[4]{a^3b^3abc^4}} = \frac{2}{1+abc}$

(theo kết quả phần 1)

Vậy $\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \ge \frac{4}{1+abc}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \ge \frac{3}{1+abc} \text{ (đpcm).}$$

Bài 60. a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và 2p là chu vi của tam giác đó.

Chứng minh rằng : $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$

✱ ***Hướng dẫn***

- $p - a = \frac{b+c-a}{2} > 0$, $p - b > 0$, $p - c > 0$

  Đặt $x = \sqrt{p-a}$, $y = \sqrt{p-b}$, $z = \sqrt{p-c}$ $(x, y, z > 0)$

- Biến đổi bất đẳng thức đã cho về bất đẳng thức theo x, y, z.

GIẢI

Ta có : $p - a > 0$ vì $p - a = \frac{b+c-a}{2}$

Tương tự $p - b > 0$, $p - c > 0$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \sqrt{p-a} > 0 \\ y = \sqrt{p-b} > 0 \\ z = \sqrt{p-c} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = p - a \\ y^2 = p - b \\ z^2 = p - c \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 3p - (a + b + c) = p$$

Vậy bất đẳng thức đã cho :

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < x + y + z \le \sqrt{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$$

- **Chứng minh** $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < x + y + z$ **(1)**

(1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 < (x + y + z)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 < x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) > 0$ (2)

Vì x, y, z > 0 nên bất đẳng thức (2) đúng ⇒ Bất đẳng thức (1) đúng (đpcm)

- **Chứng minh** $x + y + z \le \sqrt{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$ **(3)**

(3) $\Leftrightarrow (x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$ (4)

$$\text{Vì } \begin{cases} x^2 + y^2 \ge 2xy \\ y^2 + z^2 \ge 2yz \\ z^2 + x^2 \ge 2zx \end{cases} \text{ nên } 2(x^2 + y^2 + z^2) \ge 2(xy + yz + zx)$$

⇒ Bất đẳng thức (4) đúng ⇒ Bất đẳng thức (3) đúng (đpcm).

Bài 61. Cho $0 < a, b, c < 1$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau đây sai :

a) $(1 - b) > \frac{1}{4}$ **b)** $(1 - c) > \frac{1}{4}$ **c)** $(1 - a) > \frac{1}{4}$

✱ ***Hướng dẫn***

- Từ giả thiết chứng minh : $0 < a(1 - a) \le \frac{1}{4}$

  Suy ra $abc(1 - a)(1 - b)(1 - c) \le \frac{1}{64}$ (1)

- Giả sử cả ba bất đẳng thức nêu trên đều đúng, từ đó suy ra một bất đẳng thức mâu thuẫn với bất đẳng thức (1).

GIẢI

- $0 < a < 1$ nên $0 < a(1 - a)$

- Ta có : $a(1 - a) = -a^2 + a = \frac{1}{4} - (a^2 - a + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - (a - \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$

  Tóm lại : $0 < a(1 - a) \le \frac{1}{4}$ (i)

- Tương tự, ta có : $\begin{cases} 0 < b(1-b) \le \dfrac{1}{4} & \text{(ii)} \\ 0 < c(1-c) \le \dfrac{1}{4} & \text{(iii)} \end{cases}$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức (i), (ii), (iii) ta được :

$$0 < abc(1-a)(1-b)(1-c) \le \frac{1}{64} \ (1)$$

- Giả sử cả ba bất đẳng thức $\begin{cases} a(1-b) > \dfrac{1}{4} \\ b(1-c) > \dfrac{1}{4} \\ c(1-a) > \dfrac{1}{4} \end{cases}$ đều đúng

$\Rightarrow abc(1-a)(1-b)(1-c) > \dfrac{1}{64}$: mâu thuẫn với bất đẳng thức (1).

Vậy có ít nhất một trong ba bất đẳng thức đã cho là sai.

Bài 62. Cho a, b, c $\in [-1; 2]$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$.

Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \le 6$.

★ ***Hướng dẫn***

- $a \in [-1; 2] \Leftrightarrow -1 \le a \le 2 \Leftrightarrow (a+1)(a-2) \le 0 \Leftrightarrow a^2 \le a + 2$ (1)
- Tương tự $b^2 \le$ .... (2), $c^2 \le$ .... (3)
- Cộng (1), (2), và (3) ....

Bài 63. Cho $0 \le x, y, z \le 2$ và $x + y + z = 3$. Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 \le 5$

★ ***Hướng dẫn***

- $x, y, z \le 2 \Rightarrow (x-2)(y-2)(z-2) \le 0 \Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow xyz - 2(xy + \text{.............}) + 4(x + y + z) - 8 \le 0$

$\Leftrightarrow -2(xy + yz + zx) + xyz + 4 \le 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z)^2 + xyz + 4 \le 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \le 5 - xyz \le 5$ (vì $xyz \ge 0$)

Bài 64. Cho a, b, c là ba số tùy ý. Chứng minh :

a) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

b) $a^4 + b^4 + c^4 \ge abc(a + b + c)$

★ ***Hướng dẫn***

a) Từ $(a-b)^2 \ge 0$ ta được $a^2 + b^2 \ge 2ab$ (1)

Tương tự $b^2 + c^2 \ge$ .... (2), $c^2 + a^2 \ge$ .... (3)

Cộng (1), (2) và (3) ta có đpcm.

b) Áp dụng kết quả câu a

$$\left.\begin{aligned} a^4 + b^4 &\ge 2a^2b^2 \\ b^4 + c^4 &\ge \text{..........} \\ c^4 + a^4 &\ge \text{..........} \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \ge (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \ge ab.bc + \text{...........} + \text{............}$ (câu a)

$= abc(\text{................}).$

BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

- *Với hai số a, b ≥ 0 ta có :*

$$a + b \ge 2\sqrt{ab} \qquad \textit{hay} \qquad ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

- *Với ba số a, b, c ≥ 0 ta có :*

$$a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} \qquad \textit{hay} \qquad abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

Hệ quả :

a) $a, b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b \ge 2\sqrt{ab} \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}} \end{cases} \Rightarrow (a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \ge 4$

b) $a, b, c > 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}} \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \ge 9$

Bài 65. a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh rằng :

a) $(p-a)(p-b)(p-c) \le \dfrac{abc}{8}$

b) $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \ge 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

★ *Hướng dẫn*

- $2p = a + b + c$
- $p - a = \dfrac{b + c - a}{2} > 0,\ p - b > 0,\ p - c > 0$

a) Sử dụng bất đẳng thức Côsi với hai số dương x, y

$$\sqrt{xy} \le \frac{x + y}{2} \text{ với } \begin{cases} x = p - a \\ y = p - b \end{cases}$$

Sau đó nhân vế theo vế các bất đẳng thức vừa có.

b) Trước hết, chứng minh rằng với $x > 0,\ y > 0$ ta có :

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x + y}$ sau đó áp dụng với $x = p - a,\ y = p - b$, ...

GIẢI

a) Chứng minh $(p - a)(p - b)(p - c) \le \dfrac{abc}{8}$ (i)

Ta có : $p - a > 0,\ p - b > 0,\ p - c > 0$

Theo bất đẳng thức Côsi đối với hai số dương, ta có :

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{p - a + p - b}{2} = \frac{2p - (a + b)}{2} = \frac{c}{2} \quad (1)$$

Tương tự, ta có : $\begin{cases} \sqrt{(p-b)(p-c)} \le \dfrac{a}{2} \quad (2) \\ \sqrt{(p-c)(p-a)} \le \dfrac{b}{2} \quad (3) \end{cases}$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được :

$\sqrt{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} \le \dfrac{abc}{8}$ ⇒ Bất đẳng thức (i) đúng (đpcm)

b) Chứng minh $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \ge 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

- **Bước 1 :** Với x, y > 0 ta có : $\begin{cases} x + y \ge 2\sqrt{xy} > 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{xy}} > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \ge 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x + y} \quad (*)$$

- **Bước 2 :** Sử dụng bất đẳng thức (*)

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \ge \frac{4}{(p-a) + (p-b)} = \frac{4}{2p - (a+b)} = \frac{4}{c} \quad (i)$$

Tương tự : $\begin{cases} \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \ge \dfrac{4}{a} \quad (j) \\ \dfrac{1}{p-c} + \dfrac{1}{p-a} \ge \dfrac{4}{b} \quad (k) \end{cases}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (i), (j), (k) ta có :

$$2\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \ge 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 66. Chứng minh rằng với a, b là hai số không âm ta luôn có :

$3a^3 + 7a^3 > 9ab^2$

★ *Hướng dẫn*

- Phân tích $3a^3 + 7b^3 = 3a^3 + 3b^3 + 4b^3$ rồi áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm $3a^3,\ 3b^3,\ 4b^3$.
- Lưu ý thêm $\sqrt[3]{36} > \sqrt[3]{27} = 3$

GIẢI

Ta có : $3a^3 + 7b^3 = 3a^3 + 3b^3 + 4b^3 \ge 3\sqrt[3]{3a^3.3b^3.4b^3} = 3\sqrt[3]{36a^3b^6}$

$$= 3ab^2.\sqrt{36} > 3ab^2.\sqrt[3]{27} = 9ab^2 \quad \text{(đpcm)}$$

Chú ý : Phân tích cách khác $3a^3 + 7a^3 = 3a^3 + 2b^3 + 5b^3$ ta vẫn được kết quả trên.

Bài 67. Cho a, b, c > 0 và $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$.

Chứng minh rằng : $\dfrac{a + b}{2a - b} + \dfrac{c + b}{2c - b} \ge 4$

★ *Hướng dẫn*

- Từ giả thiết, tính b theo a và c.
- Tính vế trái của bất đẳng thức đã cho theo a và c (thay b vừa tính vào vế trái của bất đẳng thức đã cho).
- Sử dụng bất đẳng thức Côsi đối với hai số dương $\dfrac{a}{c}$ và $\dfrac{c}{a}$

GIẢI

- Từ giả thiết $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ ta có : $b = \frac{2ac}{a+c}$

Vậy : $\frac{a+b}{2a-b} = \frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}} = \frac{1}{2}.\frac{1+\frac{2c}{a+c}}{1-\frac{2c}{a+c}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+3c}{a}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{3c}{a}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}.\frac{c}{a}$

- Tương tự ta cũng có : $\frac{c+b}{2c-b} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}.\frac{a}{c}$

Do đó $\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geq 1 + \frac{3}{2}.2\sqrt{\frac{c}{a}.\frac{a}{c}} = 4$ (đpcm)

Bài 68. a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích S.

Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$

★ Hướng dẫn

- Sử dụng công thức $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

(Lưu ý : $p - a = \frac{b+c-a}{2} > 0$, ...)

- Lần lượt áp dụng :

– Bất đẳng thức Côsi cho ba số dương :

$a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$

– Bất đẳng thức $2ab \leq a^2 + b^2$

GIẢI

- Ta có : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

$\Leftrightarrow$ $16S^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ (1)

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương :

$b + c - a$, $a + b - c$, $c + a - b$, ta có :

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ (2)

- Từ (1) và (2) $\Rightarrow 16S^2 \leq \frac{(a+b+c)^4}{27} \Leftrightarrow 4S \leq \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow 12S\sqrt{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow 4S\sqrt{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$ (đpcm)

Bài 69. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm tam giác, chân các đường cao kẻ từ A, B, C lần lượt là A_1, B_1, C_1.

Chứng minh rằng : $\frac{AH}{A_1H} + \frac{BH}{B_1H} + \frac{CH}{C_1H} \geq 6$

Khi nào thì dấu đẳng thức xảy ra ?

★ Hướng dẫn

- **Bước 1 :** Tìm bất đẳng thức tương đương bằng cách lưu ý :
- H ở miền trong tam giác ABC nên : $AH = AA_1 - A_1H$

$\frac{AH}{A_1H} = \frac{AA_1 - A_1H}{A_1H} = \frac{AA_1}{A_1H} - 1 = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HBC}} - 1$

- Biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng :

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (*)

- **Bước 2 :** Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số a, b, c và $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ để chứng minh (*) đúng.

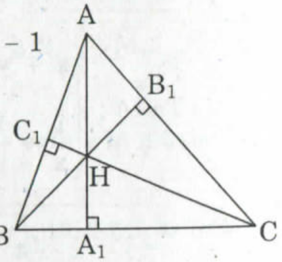
GIẢI

- **Bước 1 :**

Tam giác ABC có ba góc nhọn nên H ở miền trong của tam giác ABC $\Rightarrow AH = AA_1 - A_1H$

$\Leftrightarrow \frac{AH}{A_1H} = \frac{AA_1}{A_1H} - 1 = \frac{\frac{1}{2}AA_1.BC}{\frac{1}{2}A_1H.BC} - 1 = \frac{dt_{\Delta ABC}}{dt_{\Delta HBC}} - 1$

$= \frac{S}{S_1} - 1$ với $\begin{cases} S = dt_{\Delta ABC} \\ S_1 = dt_{\Delta HBC} \end{cases}$



Tương tự ta cũng có :

$\frac{BH}{B_1H} = \frac{S}{S_2} - 1$ và $\frac{CH}{C_1H} = \frac{S}{S_3} - 1$ với $\begin{cases} S_2 = dt_{\Delta HCA} \\ S_3 = dt_{\Delta HAB} \end{cases}$

(Chú ý $S = S_1 + S_2 + S_3$)

Vậy bất đẳng thức đã cho $\frac{AH}{A_1H} + \frac{BH}{B_1H} + \frac{CH}{C_1H} \geq 6$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\frac{S}{S_1} - 1\right) + \left(\frac{S}{S_2} - 1\right) + \left(\frac{S}{S_3} - 1\right) \geq 6$

$\Leftrightarrow S\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) \geq 9 \Leftrightarrow (S_1 + S_2 + S_3)\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) \geq 9$ (*)

- **Bước 2 :**

Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\begin{cases} S_1 + S_2 + S_3 \ge 3\sqrt[3]{S_1S_2S_3} > 0 \\ \dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2} + \dfrac{1}{S_3} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{S_1S_2S_3}} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (S_1 + S_2 + S_3)\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) \ge 9$$

Vậy bất đẳng thức (*) đã được chứng minh $\Rightarrow$ Bất đẳng thức (1) đúng

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 70. Cho a, b, c > 0. Chứng minh :

a) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$ **(1)**

b) $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$ **(2)**

★ *Hướng dẫn*

a) Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\dfrac{b}{c+a} + \ldots\ldots\right) + \left(\ldots\ \ldots\right) \ge \dfrac{3}{2} + 3$

$$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow (2a + 2b + 2c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \ge 9$$

$$\Leftrightarrow [(b+c) + (c+a) + (a+b)]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \ge 9 \quad (i)$$

Ta có : $\begin{cases} x + y + z \ge 3\sqrt[3]{\ldots\ldots} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{\ldots\ldots}} \end{cases}$ (x, y, z > 0)

$\Rightarrow (x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \ge 9.$ Vậy (i) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng (đpcm)

b) Bất đẳng thức (2)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b+c} + a\right) + \left(\frac{b^2}{c+a} + b\right) + \left(\frac{c^2}{a+b} + c\right) \ge \frac{a+b+c}{2} + (a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + b(\ldots\ldots + 1) + c(\ldots\ldots + 1) \ge \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right) + b(\ldots\ldots) + c(\ldots\ldots) \ge \ldots\ldots$$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \ldots\ldots \ge \dfrac{3}{2}$ (bất đẳng thức này đã được chứng minh).

Bài 71. Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Chứng minh b + c ≥ 16abc.

★ *Hướng dẫn*

$$a + b + c = a + (b + c) \ge 2\sqrt{a(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \ge 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow 1 \ge 4a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow b + c \ge 4a(b+c)^2 \ge 4a\left(2\sqrt{bc}\right)^2 \Rightarrow b + c \ge 16abc \text{ (đpcm)}$$

Bài 72. Cho x, y > 0 và x + y = 1. Chứng minh $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) \ge 9$ **(1)**

★ *Hướng dẫn*

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow (x+1)(y+1) \ge 9xy$ (2)

Ta có $\begin{cases} x + 1 = x + x + y \ge 3\sqrt[3]{x^2y} \\ y + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \ge \ldots\ldots\ldots \end{cases}$

$\Rightarrow (x+1)(y+1) \ge \ldots\ldots\ldots\ldots$ (đpcm)

Bài 73. Cho a, b, c > 0.

Chứng minh $a + b + c + 2\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}\right) \ge 6$

★ *Hướng dẫn*

- $a + b + c = \dfrac{1}{2}[(a+b) + (b+c) + (c+a)] \ge \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{M}$
- $2\left(\dfrac{1}{a+b} + \ldots\ldots + \ldots\ldots\right) \ge 6\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a+b)(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)}} = 6\sqrt[3]{\dfrac{1}{M}}$

Vậy $(a+b+c) + 2\left(\dfrac{1}{a+b} + \ldots\ldots + \ldots\ldots\right) \ge \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{M} + 6\sqrt[3]{\dfrac{1}{M}} \ge 2\sqrt{\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{M}\ldots\ldots} = 6$

Bài 74. Cho a, b, c. Chứng minh : ab(b + c) + bc(c + a) + ca(a + b) ≥ 6abc

★ *Hướng dẫn*

$$ab(b+c) + \ldots + \ldots \ge ab\left(2\sqrt{ab}\right) + \ldots\ldots + \ldots \ge 3\sqrt[3]{ab\left(2\sqrt{bc}\right)(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)} = 6abc$$

Bài 75. Cho a, b, c, d > 0 và $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c} + \dfrac{1}{1+d} \ge 3.$

Chứng minh $abcd \le \dfrac{1}{81}$

★ *Hướng dẫn*

Từ giả thiết ta có : $\dfrac{1}{1+a} \ge \left(1 - \dfrac{1}{1+b}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{1+c}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{1+d}\right)$

$$= \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \ge 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}} \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{1}{1+b} \geq \text{..............} \ (2) \qquad \frac{1}{1+c} \geq \text{..............} \ (3) \qquad \frac{1}{1+d} \geq \text{..............} \ (4)$$

Nhân (1), (2), (3) và (4) ta có :

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq 81\sqrt[3]{\frac{a^3 \ ......}{(1+a)^3 \ .....}} = \frac{81abcd}{(1+a)......}$$

$\Leftrightarrow \quad 1 \geq 81abcd \ \Rightarrow$ đpcm.

Ứng dụng dấu “=” xảy ra đối với bất đẳng thức a ≥ b

Bài 76.

Cho hai số x, y thay đổi và thỏa mãn điều kiện $0 \leq x \leq 3$ và $0 \leq y \leq 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = (3 - x)(4 - y)(2x + 3y)$

✶ *Hướng dẫn*

- Viết lại : $A = \frac{1}{2}(6 - 2x).\ \frac{1}{3}(12 - 3y)(2x + 3y)$

  (Mục đích $(3 - 2x) + (12 - 3y) + (2x + 3y) =$ hằng số)
- Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm, ta sẽ có $A \leq$ hằng số.

GIẢI

Ta có : $A = (3 - x)(4 - y)(2x + 3y)$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{6}(6 - 2x)(12 - 3y)(2x + 3y)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} 0 < x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad \text{nên } \begin{cases} 2x + 3y \geq 0 \\ 6 - 2x = 2(3 - x) \geq 0 \\ 12 - 3y = 3(4 - y) \geq 0 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số : $6 - 2x$, $12 - 3y$, $2x + 3y$

$$\text{Ta có : } A \leq \frac{1}{6}\left[\frac{(6 - 2x) + (12 - 3y) + (2x + 3y)}{3}\right]^3 = 36$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 36 \ \Leftrightarrow 6 - 2x = 12 - 3y = 2x + 3y = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Bài 77. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$\mathbf{f = \frac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{abc}} \quad \textbf{với } \mathbf{a \geq 3,\ b \geq 4,\ c \geq 2}$$

✶ *Hướng dẫn*

- Phân tích f thành dạng tổng của ba số A, B, C.
- Sử dụng bất đẳng thức Côsi để chứng minh $A \leq$ hằng số, ... từ đó tính được $f_{\max}$.

GIẢI

- Viết lại $f = \frac{\sqrt{c-2}}{c} + \frac{\sqrt{a-3}}{a} + \frac{\sqrt{b-4}}{b}$
- Ta có (theo bất đẳng thức Côsi : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$)

$$\blacklozenge \quad \sqrt{c-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(c-2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2 + c - 2}{2}\right) = \frac{c}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{c-2}}{c} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\blacklozenge \quad \sqrt{a-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3(a-3)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3 + a - 3}{2}\right) = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{a-3}}{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\blacklozenge \quad \sqrt{b-4} = \frac{1}{2}\sqrt{4(b-4)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4 + b - 4}{2}\right) = \frac{b}{4} \ \Leftrightarrow \ \frac{\sqrt{b-4}}{b} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } f \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \ \Rightarrow \ \max(f) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{4}$$

$$\text{khi } \begin{cases} c - 2 = 2 \\ a - 3 = 3 \\ b - 4 = 4 \end{cases} \ \text{hay} \ \ a = 6,\ b = 8,\ c = 4$$

Bài 78.

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

b) Sử dụng kết quả đã tìm được để giải phương trình

$$\mathbf{\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11}$$

✶ *Hướng dẫn*

a) * Điều kiện để y xác định.

* Tính y^2 và áp dụng bất đẳng thức Côsi $2\sqrt{ab} \leq a + b$ ta sẽ chứng minh được $y^2 \leq$ hằng số. (chú ý : $y \geq 0$)

b) Chứng minh $\begin{cases} VT \leq \text{hằng số } a_0 \\ VP \geq \text{hằng số } a_0 \end{cases}$. Vậy phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} VT = a_0 \\ VP = a_0 \end{cases}$

GIẢI

a) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ 4 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 4$

Ta có :

$$y^2 = \left(\sqrt{(x-2)} + \sqrt{(4-x)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x - 2 + 4 - x + 2\sqrt{(x-2)}.\sqrt{(4-x)} \le 2 + (x-2) + (4-x) = 4$$

Vậy $y^2 \le 4 \Leftrightarrow |y| \le 2$ mà $y > 0$ nên $y \le 2$

$y_{max} = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 4 - x \Leftrightarrow x = 3$

b) Phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$ (*)

- Vế trái = $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \le 2$ (Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$)
- Vế phải = $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2$ (Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$)

Vậy phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Chuyên đề 5 NHỊ THỨC BẬC NHẤT : f(x) = ax + b

Kiến thức cơ bản

Định nghĩa

a) Nhị thức bậc nhất (theo x) là biểu thức có dạng **f(x) = ax + b** $(a \ne 0)$

b) Nghiệm : Nghiệm của $f(x) = ax + b$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

c) Dấu :

- $x > -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow$ ax + b cùng dấu với a
- $x < -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow$ ax + b trái dấu với a

Tóm tắt

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
ax + b	**(trái dấu với a)**	**0**	**(cùng dấu với a)**

Cách nhớ : Phải ***cùng***, trái ***trái***

♦ Phương pháp giải toán

Xét dấu nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$

- Tìm nghiệm (giải phương trình $ax + b = 0$)
- Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
ax + b	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

- Ghi kết quả

Bài 79. Xét dấu nhị thức

a) $f(x) = 2x - 3$

c) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{2}x$

b) $f(x) = -4 - 3x$

d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$

GIẢI

a) $f(x) = 2x - 3$ $(a = 2 > 0)$

- Nghiệm : $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

- Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x - 3$		$-$	0	$+$	

- Kết quả : $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

  $2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

b) $f(x) = -4 - 3x$ $(a = -3 < 0)$

- Nghiệm : $-4 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$
- Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-4 - 3x$		$+$	0	$-$	

- Kết quả : $-4 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{3}$

  $-4 - 3x < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$

c) $f(x) = 1 - \frac{3}{2}x$ $\left(a = -\frac{3}{2} < 0\right)$

Giải vắn tắt

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$1 - \frac{3}{2}x$		$+$	0	$-$	

(Học sinh tự ghi kết quả)

d) $f(x) = \frac{2x + 1}{3}$ $\left(a = \frac{2}{3} > 0\right)$

Giải vắn tắt :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\frac{2x + 1}{3}$		$-$	0	$+$	

(Học sinh tự ghi kết quả)

Bài 80. Tùy theo m, lập bảng xét dấu theo x biểu thức sau :

$$P(x) = (m - 2)x + 1 - 3m$$

★ *Hướng dẫn*

Xét ba trường hợp : $m - 2 > 0$, $m - 2 < 0$, $m - 2 = 0$

GIẢI

<table>
<tr><th>m</th><th colspan="6">Bảng xét dấu P(x)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$m - 2 > 0$
$\Leftrightarrow m > 2$</td><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$\frac{3m - 1}{m - 2}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$P(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$m - 2 < 0$
$\Leftrightarrow m < 2$</td><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$\frac{3m - 1}{m - 2}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$P(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$m - 2 = 0$
$\Leftrightarrow m = 2$</td><td colspan="6">$P(x) = 1 - 6 = -5 < 0, \forall x \in R$</td></tr>
</table>

Chuyên đề 6 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Kiến thức cơ bản

Phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

- Biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$ $(b' = \frac{b}{2})$

1) Nghiệm

Δ (hoặc Δ')	Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$
$\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$)	Có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}\right.$
$\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$)	Có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ hoặc $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$
$\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$)	Vô nghiệm

Đặc biệt

- $a + b + c = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$
- $a - b + c = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$

2) Định lí Viet

Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

- Tổng hai nghiệm $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- Tích hai nghiệm $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

Bài 81. Giải và biện luận phương trình theo tham số m :

$$(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 5 = 0 \qquad (1)$$

GIẢI

- $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, lúc đó phương trình (1) trở thành phương trình bậc nhất : $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
- $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$
- Biệt số $\Delta' = (m + 1)^2 - (m - 2)(m - 5) = 9m - 9 = 9(m - 1)$
- Xét dấu Δ'

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 9m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

$$\begin{array}{c|ccccc} m & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline \Delta' & & - & 0 & + & \end{array}$$

- Giải và biện luận

◆ **Trường hợp 1 :** $\left.\begin{array}{l} m > 1 \\ m \neq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{m + 1 - 3\sqrt{m - 1}}{m - 2} \\ x_2 = \dfrac{m + 1 + 3\sqrt{m - 1}}{m - 2} \end{array}\right.$

◆ **Trường hợp 2 :** $m = 1 \Leftrightarrow \Delta' = 0$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{m + 1}{m - 2} = -2$

◆ **Trường hợp 3 :** $m < 1 \Leftrightarrow \Delta' < 0$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm

Tóm tắt

m	Δ	Phương trình (1)
$m < 1$	–	Vô nghiệm
$m = 1$	–	Có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -2$
$1 < m \neq 2$	0	Có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 = \frac{m + 1 \pm 3\sqrt{m - 1}}{m - 2}$
$m = 2$		Phương trình bậc nhất : $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Bài 82. **Giải và biện luận theo tham số m phương trình :**

$$(2m - 1)x^2 + 2(2 - m)x - 1 = 0 \quad (*)$$

★ ***Hướng dẫn***

- $m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ Phương trình (*) là phương trình bậc nhất :

$$3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

- $m \neq \frac{1}{2}$

$\Delta' = (2 - m)^2 + (2m - 1)$

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m + 3 = (m - 1)^2 + 2 > 0, \forall m \in R.$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Bài 83. **Giải và biện luận theo tham số m phương trình :**

$$mx^2 - 2(m + 3)x + m + 1 = 0 \quad (*)$$

★ ***Hướng dẫn***

- $m = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình (*) là phương trình bậc nhất :

$$-6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

- $m \neq 0 \Rightarrow \Delta' = (m + 3)^2 - m(m + 1) = 5m + 9$

m	$-\infty$		$-\frac{9}{5}$		$+\infty$
Δ'		−	0	+	

m	D'	Phương trình (*)
$-\infty$		
	−	
$-\frac{9}{5}$	0	Có nghiệm kép $x_1 = x_2 =$ ....
	+	
0		Phương trình bậc nhất : $-6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$
	+	(Học sinh tự ghi các kết quả còn lại)
$+\infty$		

Chứng minh phương trình bậc hai luôn có hai nghiệm

Bài 84. **Chứng minh phương trình sau luôn có hai nghiệm phân biệt :**

$$x^2 - (2m - 3)x - (m + 5) = 0$$

★ ***Hướng dẫn***

- $a \neq 0$.
- Tính Δ (hoặc Δ') và chứng minh $\Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$)

GIẢI

$x^2 - (2m - 3)x - (m + 5) = 0$

$\Delta = (2m - 3)^2 + 4(m + 5) = 4m^2 - 8m + 29$

$= 4(m^2 - 2m + 1) + 25 = 4(m - 1)^2 + 25 > 0, \forall m$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 85. **Chứng minh phương trình sau luôn có hai nghiệm phân biệt :**

$$x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$$

★ ***Hướng dẫn***

- $a \neq 0$.
- Tính Δ (hoặc Δ') và chứng minh $\Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$)

GIẢI

$x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$

$\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} \bullet\ x_1 = -m + 1 \\ \bullet\ x_2 = -m - 1 \end{cases}$

Tính giá trị của tham số để phương trình có nghiệm kép và tính nghiệm kép tương ứng

★ ***Hướng dẫn***

- $a \neq 0$
- Tính Δ hoặc Δ' (theo tham số)
- Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$)

Nghiệm kép của phương trình là : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ hoặc $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$

Bài 86. Tìm m để phương trình sau có nghiệm kép và tính nghiệm kép đó :

$$(m+3)x^2 + 2(3m+2)x + m + 3 = 0$$

GIẢI

Phương trình $(m+3)x^2 + 2(3m+2)x + m + 3 = 0$

$\Delta' = (3m+2)^2 - (m+3)^2 = (4m+5)(2m-1)$

Phương trình có nghiệm kép :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ (4m+5)(2m-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{5}{4} \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Nghiệm kép của phương trình là : $x_1 = x_2 = \dfrac{-(3m+2)}{m+3}$

$m = -\frac{5}{4}$	$m = \frac{1}{2}$
$x_1 = x_2 = 1$	$x_1 = x_2 = -1$

Bài 87. Tính m để phương trình sau có nghiệm kép : $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$

★ ***Hướng dẫn***

$\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 12m + 9$

- Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{4}$
- Nghiệm kép của phương trình là :

$$x_1 = x_2 = \frac{2m+3}{2} = \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right) + 3}{2} = \frac{3}{4}$$

Bài 88. Tính m để phương trình sau có nghiệm kép

$(m-1)x^2 - 3(m-1)x + 2 = 0$

★ ***Hướng dẫn***

$\Delta = 9(m-1)^2 - 8m(m-1) = (m-1)(m-9)$

- Phương trình có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-1)(m-9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = 9 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow m = 9$$

- Nghiệm kép của phương trình là : $x_1 = x_2 = \dfrac{3(m-1)}{2(m-1)} = \dfrac{3}{2}$

Tính tham số để phương trình bậc hai có một nghiệm cho sẵn
Tính nghiệm còn lại

Bài 89. Tính m để phương trình $(m+1)x^2 + 3(m-2)x + m = 0$ có nghiệm $x = -2$. Tính nghiệm còn lại.

★ ***Hướng dẫn***

- Thay $x_1 = -2$ vào phương trình, từ đó tính được tham số m.
- Thay x_1 và m vào $P = x_1x_2$ ta sẽ tính được nghiệm còn lại x_2.

GIẢI

- Phương trình có nghiệm $x_1 = -2$

$\Leftrightarrow (m+1)(-2)^2 + 3(m-2)(-2) + m = 0$

$\Leftrightarrow 4(m+1) - 6(m-2) + m = 0 \Leftrightarrow -m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = 16$

- Tính nghiệm còn lại.

Ta có $x_1\, x_2 = \dfrac{m}{m+1}$ với $\begin{cases} x_1 = -2 \\ m = 16 \end{cases}$

Vậy $-2x_2 = \dfrac{16}{17} \Leftrightarrow x_2 = -\dfrac{8}{17}$

Xác định điều kiện của một tham số để phương trình bậc hai có hai nghiệm hoặc vô nghiệm

Bài 90. Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 3 = 6$.

Xác định m để phương trình : a) Có hai nghiệm b) Vô nghiệm

★ ***Hướng dẫn***

- Tính Δ (hay Δ')
- Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \quad (\text{hay } \Delta' \geq 0) \end{cases}$

(Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$)

Chú ý : Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \quad (a \neq 0)$

GIẢI

$\Delta' = m^2 - (m+1)(m-3) = 2m + 3$

a) Phương trình có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 2m+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \geq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

b) Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{3}{2}$

Bài 91. **Cho phương trình $x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 = 0$.**

Tìm sự liên hệ giữa a và b để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

★ ***Hướng dẫn***

$\Delta' = 2ab$

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow ab > 0 \Leftrightarrow$ a và b cùng dấu

Tính giá trị của một biểu thức đối xứng đối với các nghiệm x_1, x_2 của phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$$E = x_1^2 + x_2^2 \ , \ E = x_1^3 + x_2^3 \ , \ E = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \ , \ \ldots\ldots$$

Bài 92. **Giả sử phương trình $x^2 - (m - 1)x + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2.**

Tính các biểu thức sau theo m

a) $E = x_1^2 + x_2^2$ b) $E = x_1^3 + x_2^3$ c) $E = x_1^4 + x_2^4$

d) $E = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ e) $E = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ f) $E = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

★ ***Hướng dẫn***

- Biểu thị E theo $S = x_1 + x_2$ và $P = x_1.x_2$
- Tính S và P rồi thay vào biểu thức E
- Chú ý : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$

  $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.

GIẢI

Ta có : $S = x_1 + x_2 = m - 1$; $P = x_1.x_2 = 2m + 1$

a) $E = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1.x_2$

$= (m - 1)^2 - 2(2m + 1) = m^2 - 6m - 1$

b) $E = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(\,x_1^2 + x_2^2 - x_1.x_2)$

$= (m - 1)[(m^2 - 6m - 1) - (2m + 1)]$

$= (m - 1)(m^2 - 8m - 2)$

c) $E = x_1^4 + x_2^4 = (\,x_1^2 + x_2^2)^2 - 2\,x_1^2.x_2^2$

$= (m^2 - 6m - 1)^2 - 2(2m + 1)^2$

d) $E = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{m - 1}{2m + 1} \quad (m \neq -\frac{1}{2})$

e) $E = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{m^2 - 6m - 1}{2m + 1} \quad (m \neq -\frac{1}{2})$

f) $E = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{m^2 - 6m - 1}{(2m + 1)^2} \quad (m \neq -\frac{1}{2})$

Chú ý : Bài này đề không yêu cầu xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

Cần nhớ : $S = x_1 + x_2$ *và* $P = x_1.x_2$

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = S^2 - 2P$

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(\,x_1^2 + x_2^2 - x_1.x_2) = S(S^2 - 3P)$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2} = \frac{S}{P}$

Bài 93. **Cho phương trình $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$ (*)**

a) **Xác định m để phương trình (*) có hai nghiệm.**

b) **Với những giá trị nào của m thì phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn : $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$.**

★ ***Hướng dẫn***

$\Delta' = (m - 1)^2 - (m + 1)(m - 2) = -m + 3$

m	−∞		3		+∞
Δ'		+	0	−	

a) $\begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \leq 3 \end{cases}$

b) $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2 \quad \Leftrightarrow \quad 4.\frac{2(m - 1)}{m + 1} = 7.\frac{m - 2}{m + 1}$

$\Leftrightarrow 8(m - 1) = 7(m - 2) \quad \Leftrightarrow \quad m = -6$ thỏa điều kiện câu a

Bài 94. **Cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$**

a) **Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.**

b) **Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m.**

★ ***Hướng dẫn***

(Câu b)

- Tính S và P theo tham số m
- Khử tham số m giữa S và P

GIẢI

a) $\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 3m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} S = \dfrac{2(m+1)}{m-1} = \dfrac{2(m-1)+4}{m-1} = 2 + \dfrac{4}{m-1} \\ P = \dfrac{m}{m-1} = \dfrac{(m-1)+1}{m-1} = 1 + \dfrac{1}{m-1} \end{cases}$

$$\begin{cases} S = 2 + \dfrac{4}{m-1} \\ 4P = 4 + \dfrac{4}{m-1} \end{cases} \Rightarrow S - 4P = -2 \quad \Leftrightarrow (x_1 + x_2) - 4x_1.x_2 = -2$$

Bài 95. Cho phương trình $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 1 = 0$. Tìm m để :

a) Phương trình có đúng một nghiệm.

b) Phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

★ ***Hướng dẫn***

a) Phương trình có đúng một nghiệm

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Phương trình trở thành phương trình bậc nhất.} \\ \text{Phương trình bậc hai có nghiệm kép.} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m - 1 = 0 & \Leftrightarrow m = 1 \\ \Delta' = 0 \ (m \neq 1) & \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

b) Phương trình có hai nghiệm cùng dấu

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq -\dfrac{1}{2} \\ 1 > 0 \quad \text{hiển nhiên} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{2} \text{ và } m \neq 1$

Bài 96. Cho phương trình $mx^2 - 2(m - 3)x + m - 4 = 0$ (*)

Xác định m để phương trình có đúng một nghiệm dương

★ ***Hướng dẫn***

Phương trình (*) có đúng một nghiệm dương

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Phương trình (*) là phương trình bậc nhất có nghiệm dương (1)} \\ \text{Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu (2) hoặc có một nghiệm = 0} \\ \quad \text{và nghiệm còn lại dương (2')} \\ \text{Phương trình (*) có nghiệm kép dương (3)} \end{array}\right.$

- Mệnh đề (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$
- Mệnh đề (2) $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \dfrac{m-4}{m} < 0$

m	−∞		0		4		+∞
m − 4		−	|	−	0	+	
m		−	0	+	|	+	
P		+	‖	−	0	+	

Vậy $0 < m < 4$

- Mệnh đề (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \\ x_1 = x_2 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \quad \text{(i)} \\ \Delta' = (m-3)^2 - m(m-4) = -2m + 9 = 0 \quad \text{(j)} \\ x_1 = x_2 = \dfrac{m-3}{m} > 0 \quad \text{(k)} \end{cases}$$

Từ (j) ta có : $m = \dfrac{9}{2} \Rightarrow$ (i) và (k) thỏa mãn. Vậy $m = \dfrac{9}{2}$

- Xét mệnh đề (2')

– Phương trình (*) có một nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$

– Với $m = 4$ thì phương trình (*) là $4x^2 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (!)

Vậy mệnh đề (2') không xảy ra.

Đáp số : Đề bài thỏa mãn $\Leftrightarrow 0 \leq m < 4 \ \text{V} \ m = \dfrac{9}{2}$

Cần nhớ : *Phương trình bậc hai* $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *có hai nghiệm trái dấu* $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$ *(lúc đó hiển nhiên* $\Delta > 0$ *vì* $P = \dfrac{c}{a} < 0$ $\Leftrightarrow ac < 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0$*)*

Bài 97. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 2)x + m(m - 3) = 0$ (1)

a) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 0$

b) Chứng minh rằng nếu phương trình trên có một nghiệm dương là x_1 thì phương trình : $m(m - 3)x^2 - 2(m - 2)x + 1 = 0$ cũng có một nghiệm dương là $\dfrac{1}{x_1}$

★ ***Hướng dẫn***

a) * $\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = -m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < 4$

* $x_1^3 + x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 = -x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow S = 0 \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (nhận)

b) Theo giả thiết : $x_1 > 0$ là một nghiệm của phương trình

$x^2 - 2(m-2)x + m(m-3) = 0$ nên $x_1^2 - 2(m-2)x_1 + m(m-3) = 0$

$$\Rightarrow 1 - 2(m-2)\frac{1}{x_1} + m(m-3)\frac{1}{x_1^2} = 0 \text{ (chia hai vế cho } x_1^2\text{)}$$

$$\Rightarrow m(m-3)\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 - 2(m-2)\left(\frac{1}{x_1}\right) + 1 = 0$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_1}$ là một nghiệm dương của phương trình

$m(m-3)x^2 - 2(m-2)x + 1 = 0$ (đpcm)

Bài 98. Cho phương trình $2x^2 - 2(m+1)x + m + 5 = 0$ (1).

Xác định m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức : $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = 32$ (*)

★ ***Hướng dẫn***

- Tính $\Delta' = \ldots\ldots\ldots \ge 0 \Leftrightarrow m \le -3 \ \mathrm{V}\ m \ge 3$
- Phương trình (*) xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} m \le -3 \ \mathrm{V}\ m \ge 3 \\ x_1.x_2 \ne 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le -3 \ \mathrm{V}\ m \ge 3 \\ x_1.x_2 = \dfrac{m+5}{2} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -3 \text{ và } m \ne -5 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$$

- Phương trình (*) $\Leftrightarrow \dfrac{S^2 - 2P}{P^2} = 32$ với $\begin{cases} S = m + 1 \\ P = \dfrac{m+5}{2} \end{cases}$

Vậy $\dfrac{S^2 - 2P}{P^2} = 32 \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow 7m^2 + 79m + 204 = 0$

Đáp số : $m = -4 \ \mathrm{V}\ m = -\dfrac{51}{7}$

Bài 99. Cho phương trình $3x^2 - (2m+1)x - 2 = 0$ (*).

a) Chứng minh phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm α_1, α_2 thỏa mãn $\alpha_1 = 3x_1 - 1$ và $\alpha_2 = 3x_2 - 1$

★ ***Hướng dẫn***

a) Chứng minh $\Delta > 0$, $\forall\, m \in R$

b) Tính $\begin{cases} S = \alpha_1 + \alpha_2 = 3(x_1 + x_2) - 2 = \ldots\ldots \\ P = \alpha_1.\alpha_2 = 9x_1.x_2 - 3(x_1 + x_2) + 1 = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$

(**Chú ý :** $x_1 + x_2 = \dfrac{2m+1}{3}$ và $x_1.x_2 = -\dfrac{2}{3}$)

Vậy α_1 và α_2 là nghiệm phương trình $\alpha^2 - S\alpha + P = 0$

Đáp số : $\alpha^2 - (2m-1)\alpha - 2(m+3) = 0$

Bài 100. Cho hai phương trình : $x^2 + mx + 1 = 0$ và $x^2 + x + m = 0$.

Xác định m để hai phương trình có một nghiệm chung.

★ ***Hướng dẫn***

- Điều kiện $\begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 4 \ge 0 & (1) \\ \Delta_2 = 1 - 4m \ge 0 & (2) \end{cases}$
- Gọi x_0 là một nghiệm chung của hai phương trình, ta có :

$$\begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow mx_0 + 1 - x_0 - m = 0$$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(m - 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \ \mathrm{V}\ m = 1$

- Với $x_0 = 1$ thay vào hai phương trình ta tính được m = ..., sau đó thử lại m = ... thì hai phương trình có nghiệm chung.
- $m = 1 \Rightarrow$ Điều kiện (2) không thỏa.

Đáp số : $m = -2$.

Chuyên đề 7

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI X VÀ Y

Kiến thức cơ bản

- Hệ phương trình đối xứng với x và y là hệ phương trình không thay đổi khi ta hoán vị x và y lẫn nhau.
- Cách giải : Tính $S = x + y$ và $P = xy$

  Vậy x, y là nghiệm phương trình $X^2 - SX + P = 0$

  (điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$)

Bài 101. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \mathbf{x + y = 10} \\ \mathbf{x^2 + y^2 = 58} \end{cases}$

★ Hướng dẫn

- Đã có $S = x + y$
- Tính $P = xy$

(**Chú ý** : $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, sau đó giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$)

GIẢI

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ (x + y)^2 - 2xy = 58 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ (10)^2 - 2xy = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 21 \end{cases}$$

Vậy x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 10X + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 3 \\ X = 7 \end{array}\right.$

Vậy $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$

Bài 102. Giải hệ pương trình : $\begin{cases} \mathbf{x + y = 1} \\ \mathbf{x^3 + y^3 = 61} \end{cases}$

GIẢI

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]$$

Từ đây ta sẽ tính được xy vì đã biết : $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 61 \end{cases}$

Tóm lại $\begin{cases} S = x + y = 1 \\ P = xy = -20 \end{cases}$

Vậy ta có : $X^2 - X - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 5 \\ X = -4 \end{array}\right.$

áp số : $\begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases}$

ài 103. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \mathbf{x + y = 5} \\ \mathbf{x^4 + y^4 = 97} \end{cases}$

GIẢI

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \\ &= [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = (25 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 \\ &= 2(xy)^2 - 100xy + 625 \end{aligned}$$

Vậy $2(xy)^2 - 100xy + 528 = 0$

$$\Leftrightarrow (xy)^2 - 50xy + 264 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 44 \\ xy = 6 \end{array}\right.$$

Chú ý : $(xy)^2 - 50(xy) + 264 = 0$ là một phương trình bậc hai ẩn số là (xy).

Ta có hai trường hợp :

◆ $\begin{cases} S = x + y = 5 \\ P = xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

◆ $\begin{cases} S = x + y = 5 \\ P = xy = 44 \end{cases}$ Vô nghiệm vì $S^2 - 4P < 0$

Bài 104. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \mathbf{xy = 4} \\ \mathbf{x^2 + y^2 = 28} \end{cases}$

GIẢI

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ (x + y)^2 - 2xy = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ (x + y)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ \left[\begin{array}{l} x + y = 6 \\ x + y = -6 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ta có hai trường hợp :

◆ $\begin{cases} S = x + y = 6 \\ P = xy = 4 \end{cases}$

x và y là nghiệm phương trình : $X^2 - 6X + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 3 - \sqrt{5} \\ X = 3 + \sqrt{5} \end{array}\right.$

Vậy $\begin{cases} x = 3 + \sqrt{5} \\ y = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 3 - \sqrt{5} \\ y = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$

◆ $\begin{cases} S = x + y = -6 \\ P = xy = 4 \end{cases}$

Tương tự ta có : $\begin{cases} x = -3 + \sqrt{5} \\ y = -3 - \sqrt{5} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -3 - \sqrt{5} \\ y = -3 + \sqrt{5} \end{cases}$

Bài 105. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 & (1) \\ x + y = -2 & (2) \end{cases}$

◆ **Cách 1**

- Từ (2) tính theo y theo x rồi thế vào (1) ta có :

  $x^2 - x(-2 - x) + (-2 - x)^2 = 13$
- Tính x rồi tính y tương ứng.

◆ **Cách 2**

$x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy$

Mà $x + y = -2$ nên $13 = 4 - 3xy \Leftrightarrow xy = -3$

Vậy $\begin{cases} S = x + y = -2 \\ P = xy = -3 \end{cases}$ **Đáp số :** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 106. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 + y^3 = -7 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

GIẢI

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = -7 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = -7 & (1) \\ x^2 - xy + y^2 = 7 & (2) \end{cases}$$

Từ đây ta tính được x + y rồi trở lại giải tương tự bài 105.

Đáp số : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 107. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$

★ *Hướng dẫn*

- Biến đổi vế trái của (1) :

  $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{(x + y)^2 - 2xy}{xy} = \dfrac{13}{6}$
- Từ (1) và (2) ta sẽ tính được xy
- Giải $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

Đáp số : (x ; y) = (2 ; 3) hay (x ; y) = (3 ; 2)

Bài 108. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - 3y = 1 & (1) \\ x^2 - xy = 24 & (2) \end{cases}$

★ *Hướng dẫn*

Từ (1) tính y theo x rồi thay vào (2) ta có phương trình bậc hai có ẩn số x : $x^2 + x - 72 = 0$

Đáp số : $\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -9 \\ y = -\dfrac{19}{3} \end{cases}$

Bài 109. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a) & (1) \\ (x + y)^2 = 4 & (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi a = 1.

b) Tìm a để hệ có đúng hai nghiệm.

★ *Hướng dẫn*

Vế trái của (1) : $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

Sau đó kết hợp với (2) ta tính được xy.

$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 - a \end{cases}$ (I) hay $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 - a \end{cases}$ (II)

a) a = 1, ta có :

Hệ (I) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Hệ (II) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

b) Hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{hệ (I) và (II) đều có nghiệm kép và hai nghiệm kép này khác nhau (i)} \\ \text{hệ (I) có hai nghiệm và hệ (II) vô nghiệm} \quad \text{(j)} \\ \text{hệ (II) có hai nghiệm và hệ (I) vô nghiệm} \quad \text{(k)} \end{array}\right.$$

- Mệnh đề (i) $\Leftrightarrow S^2 - 4P = 0 \Leftrightarrow 4 - 4(1 - a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$$\text{Với } a = 0 \left[\begin{array}{l} \text{hệ (I)} \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \\ \text{hệ (II)} \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1 \end{array}\right.$$

(Nghiệm kép hệ (I) khác nghiệm kép hệ (II))

- Mệnh đề (j) và (k) không xảy ra vì hệ (I) và (II) đều có $S^2 - 4P = 4a$

Bài 110. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = 4 \\ x + y = 2m + 1 \end{cases}$ **(I)**

a) Giải hệ (I) khi m = 5

b) Xác định m để hệ (I) có nghiệm (x; y)

★ ***Hướng dẫn***

- Điều kiện $x \geq 0$, $y \geq$ ....
- Đặt $u = \sqrt{x}$ và $v = \sqrt{y-1}$ (điều kiện : $u, v \geq 0$)
- Tính $S = u + v$ và $P = u.v$ rồi dùng phương trình $t^2 - St + P = 0$ (*)
- Hệ phương trình (I) có nghiệm (x; y) $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm $t_1, t_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases}$

GIẢI

- Điều kiện : $x \geq 0$ và $y \geq 1$
- Đặt $u = \sqrt{x}$ và $v = \sqrt{y-1}$ (điều kiện $u, v \geq 0$), ta có :

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = 4 \\ x + y = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 + v^2 + 1 = 2m + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ (u + v)^2 - 2uv = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 8 - m \end{cases}$$

Vậy u và v là nghiệm phương trình $t^2 - St + P = 0$ hay

$$t^2 - 4t + (8 - m) = 0 \ (*)$$

a) $m = 5 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 3$

Đáp số : $\begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 10 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$

b) Hệ phương trình có nghiệm (x; y) $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm $t_1, t_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - (8 - m) = m - 4 \geq 0 \\ P = 8 - m \geq 0 \\ S = 4 > 0 \text{ hiển nhiên} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 8$$

Bài 111. (ĐH – KHối D – năm 2004)

Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$ **có nghiệm (x; y)**

★ ***Hướng dẫn***

- $x \geq 0$ và $y \geq 0$
- Đặt $u = \sqrt{x}$ và $v = \sqrt{y}$ $\begin{cases} u, v \geq 0 \\ u^3 = x\sqrt{x},\ v^3 = \ldots\ldots \end{cases}$
- Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u + v = \ldots\ldots \\ u^3 + v^3 = \ldots\ldots \end{cases}$

Dùng công thức $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$ ta tính được u.v = ... Vậy u và v là nghiệm phương trình $t^2 - t + m = 0$ (*)

Tiếp tục giống bài 10

Đáp số : $0 \leq m \leq \dfrac{1}{4}$

Chuyên đề 8

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI

Kiến thức cơ bản

1) Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai là hệ phương trình có dạng :

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

2) Cách giải

- **Bước 1 :** Kiểm tra x = 0 và y = 0 có phải là nghiệm của hệ hay không ?
- **Bước 2 :** Với x ≠ 0 và y ≠ 0 đặt x = Ky. Thay x = Ky vào hệ phương trình ta sẽ có một phương trình bậc hai theo K, tính K.
- **Bước 3 :** Tính x và y

Bài 112. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 & (1) \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 & (2) \end{cases}$

GIẢI

- **Bước 1 :** Ta thấy x = 0 và y = 0 không phải là nghiệm của hệ phương trình.
- **Bước 2 :** Đặt y = Kx (K ≠ 0)

Ta có : $\begin{cases} 3x^2 + 2Kx^2 + K^2x^2 = 11 \\ x^2 + 2Kx^2 + 3K^2x^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(K^2 + 2K + 3\right) = 11 & (1') \\ x^2\left(3K^2 + 2K + 1\right) = 17 & (2') \end{cases}$

Vì $x^2 \neq 0$ nên $\dfrac{K^2 + 2K + 3}{3K^2 + 2K + 1} = \dfrac{11}{17} \Leftrightarrow 16K^2 - 12K - 40 = 0$

$$\Leftrightarrow 4K^2 - 3K - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} K = 2 \\ K = -\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

- **Bước 3 :**

- K = 2, thay vào (1') ta có $11x^2 = 11$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2x = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2x = -2 \end{array}\right.$$

- $K = -\dfrac{5}{4}$, thay vào(1') ta có : $\left(\dfrac{25}{16} - \dfrac{10}{4} + 3\right)x^2 = 11 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{16}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -\dfrac{5}{\sqrt{3}} \\ x = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Kết luận : Hệ phương trình có bốn nghiệm :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases};\quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases};\quad \begin{cases} x = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ y = -\dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{cases};\quad \begin{cases} x = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Bài 113. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 15 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8 \end{cases}$

★ ***Hướng dẫn***

Giải tương tự bài 112 (đặt x = Ky).

Ta có : $K^2 + 9K - 22 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} K = 2 \\ K = -11 \end{array}\right.$

Đáp số : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases};\quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases};\quad \begin{cases} x = -\dfrac{11}{\sqrt{14}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \end{cases};\quad \begin{cases} x = \dfrac{11}{\sqrt{14}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{14}} \end{cases}$

MỘT SỐ ĐỀ THI VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 114. (ĐH – Khối B – năm 2002)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} & (1) \\ x+y = \sqrt{x+y+2} & (2) \end{cases}$

★ *Hướng dẫn*

- (1) có dạng $\sqrt[3]{A} = \sqrt{A}$ $\begin{cases} A \ge 0 \\ \left(\sqrt[3]{A}\right)^6 = \left(\sqrt{A}\right)^6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ A = 1 \end{array}\right.$
- $x + y = \sqrt{x+y+2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+y \ge 0 \\ t = \sqrt{t+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 - t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$

Tóm lại ta có hai hệ :

- ♦ Hệ (I) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$
- ♦ Hệ (II) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Bài 115. (ĐH – Khối A – năm 2003)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$

★ *Hướng dẫn*

- Điều kiện đối với x và y ?
- Biến đổi (1) về dạng tích số rồi kết hợp với (2) ta được hai hệ phương trình và giải hai hệ phương trình này.

GIẢI

- Điều kiện : $x \ne 0$ và $y \ne 0$
- Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-y) + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow (x-y) + \dfrac{x-y}{xy} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(1 + \frac{1}{xy}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ xy = -1 \end{array}\right.$$

Vậy ta có hai hệ phương trình :

Hệ (I) $\begin{cases} x = y \ (xy \ne 0) \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \ne 0 \\ x^3 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \ne 0 \\ (x-1)\left(x^2 + x - 1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \ne 0 \\ x = 1 \ \text{V} \ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Hệ (II) $\begin{cases} xy = -1 \ (xy \ne 0) \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{x} \\ -\dfrac{2}{x} = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{x} \\ x^4 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

Giải $x^4 + x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0$$

Phương trình này vô nghiệm

Đáp số : Hệ phương trình có ba nghiệm (x ; y) :

$$x = y = 1, \quad x = y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x = y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Bài 116. (ĐH – KHối B – 2003)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} & (1) \\ 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} & (2) \end{cases}$

★ *Hướng dẫn*

- Điều kiện đối với x và y (Chú ý : hai vế của phương trình luôn cùng dấu)
- Biến đổi $\begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 & \text{(i)} \\ 3xy^2 = x^2 + 2 & \text{(j)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(i)} - \text{(j)} \end{cases}$

(Ta sẽ được hai hệ phương trình, sau đó giải mỗi hệ phương trình này)

GIẢI

- Điều kiện $\begin{cases} x \ne 0 \text{ và } y \ne 0 \\ \text{(1) cho thấy vế phải } \dfrac{y^2 + 2}{x^2} > 0 \text{ nên vế trái } 3y > 0 \Leftrightarrow y > 0 \end{cases}$

Tương tự ta cũng có $x > 0$.

Tóm lại, điều kiện đối với x và y là $x > 0$ và $y > 0$.

- Biến đổi (kèm điều kiện đã nêu)

$$\text{Hệ} \begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2y = y^2 + 2 \ \ (i)\\ 3xy^2 = x^2 + 2 \ \ (j)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(i)\\ 3xy(x - y) = y^2 - x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(i)\\ 3xy(x - y) + (x - y)(x - y) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(i)\\ (x - y)(3xy + x + y) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(i)\\ \left[\begin{array}{l} x = y\\ 3xy + x + y = 0 \ \ (*)\end{array}\right.\end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì $x > 0$ và $y > 0$.

$$\text{Tóm lại hệ} \begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2y = y^2 + 2\\ x = y > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = y > 0\\ 3x^3 - x^2 - 2 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = y > 0\\ (x - 1)\left(3x^2 + 2x + 2\right) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1\\ \begin{cases}x = y > 0\\ 3x^2 + 2x + 2 = 0 : \text{vô nghiệm}\end{cases}\end{array}\right.$$

Đáp số : $x = y = 1$

Chuyên đề 9 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Kiến thức cơ bản

Tam thức bậc hai (theo x) là biểu thức có dạng :

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)}$$

- Nghiệm (nếu có) của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ là nghiệm của phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$
- Biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ (hay $\Delta' = b'^2 - ac$, với $b' = \frac{b}{2}$)
- Dấu

Δ hay Δ'	**Nghiệm của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$**	**Dấu của $f(x) = ax^2 + bx + c$**
$\Delta > 0$ hay $\Delta' > 0$	Tam thức có hai nghiệm phân biệt : $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ hay $x_1, x_2 = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$ (Giả sử $x_1 < x_2$)	♦ $x \in (x_1; x_2) \Rightarrow f(x)$ trái dấu với a ♦ $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ $\Rightarrow f(x)$ cùng dấu với a $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & \textbf{cùng dấu với a} & 0 & \text{trái dấu với a} & 0 & \textbf{cùng dấu với a} & \end{array}$
$\Delta = 0$ hay $\Delta' = 0$	Tam thức có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ hay $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$	$f(x)$ cùng dấu với a, $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline f(x) & & \textbf{cùng dấu a} & 0 & \textbf{cùng dấu a} & \end{array}$
$\Delta < 0$ hay $\Delta' < 0$	Tam thức vô nghiệm	$f(x)$ cùng dấu với a, $\forall x \in R$ $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & \textbf{cùng dấu a} & \end{array}$

Cần nhớ :

- $a + b + c = 0 \Leftrightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ *có hai nghiệm* $\begin{cases}x_1 = 1\\ x_2 = \frac{c}{a}\end{cases}$
- $a - b + c = 0 \Leftrightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ *có hai nghiệm* $\begin{cases}x_1 = -1\\ x_2 = -\frac{c}{a}\end{cases}$

Xét dấu tam thức bậc hai : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ (hay $\Delta' = b'^2 - ac$)

- Nếu $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$) thì tính hai nghiệm x_1, x_2 của tam thức rồi lập bảng xét dấu f(x) và ghi kết quả.
- Nếu $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$) thì f(x) luôn cùng dấu với a.
- Nếu $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$) thì f(x) luôn cùng dấu với a khi $x \neq -\frac{b}{2a}$ (hoặc $x \neq -\frac{b'}{a}$)

Chú ý : Nếu tính nhẩm được nghiệm của f(x) thì không cần phải tính Δ.

Bài 117. Xét dấu tam thức $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$ $(a = 2 > 0)$

GIẢI

Dễ thấy f(x) có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{5}{2}$

◆ Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

◆ Kết quả

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \lor x > \frac{5}{2}$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{5}{2}$

Bài 118. Xét dấu tam thức $g(x) = -2x^2 + x + 6$ $(a = -2 < 0)$

GIẢI

$\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$

Vậy g(x) có hai nghiệm $x_1 = \frac{-1+7}{-4} = -\frac{3}{2}$ và $x_2 = \frac{-1-7}{-4} = 2$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
g(x)		−	0	+	0	−	

(Học sinh tự ghi kết quả – giống bài 117)

Bài 119. Xét dấu tam thức $h(x) = -3x^2 - 5x$ $(a = -3 < 0)$

GIẢI

Ta có : $h(x) = x(-3x - 5)$

h(x) có hai nghiệm : $x_1 = 0$ và $x_2 = -\frac{5}{3}$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		0		$+\infty$
h(x)		−	0	+	0	−	

(Học sinh tự ghi kết quả – giống bài 117)

Bài 120. Xét dấu tam thức $A = 4x^2 + 4x + 1$

GIẢI

$$A = 4x^2 + 4x + 1 \text{ có } \begin{cases} a = 4 > 0 \\ \Delta' = 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A có nghiệm kép $x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

Vậy $A = 4x^2 + 4x + 1 > 0, \forall x \neq -\frac{1}{2}$

Cách khác : $A = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2 \geq 0, \forall x \in R$

(Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$)

Bài 121. Xét dấu $B = -25x^2 + 20x - 4$

★ *Hướng dẫn*

$$\begin{cases} a = -25 < 0 \\ \Delta' = 0 \Rightarrow \text{B Có nghiệm kép } x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Vậy $B = -25x^2 + 20x - 4 < 0, \forall x \neq \frac{2}{5}$

Cách khác : $B = -(25x^2 - 20x + 4) = -(5x - 2)^2 \leq 0 \quad \forall x \in R$

(Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$)

Bài 122. Xét dấu tam thức $C = 9x^2 - 6x + 1$

✶ *Hướng dẫn*

$$\begin{cases} a = 9 > 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Rightarrow C > 0,\ \forall x \neq \frac{1}{3}$$

Cách khác : $C = (3x - 1)^2 \geq 0,\ \forall x \in R$

(Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$)

Bài 123. Xét dấu tam thức $D = 3x^2 + 2x\sqrt{3} + 1$

✶ *Hướng dẫn*

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Rightarrow D > 0,\ \forall x \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Cách khác : $D = (x\sqrt{3} + 1)^2 \geq 0,\ \forall x \in R$

(Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$)

Bài 124. Xét dấu tam thức $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

GIẢI

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4 \text{ có } \begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta = 9 - 32 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + 4 > 0,\ \forall x \in R$

Bài 125. Xét dấu tam thức $g(x) = -x^2 + 4x - 8$

GIẢI

$$g(x) = -x^2 + 4x - 8 \text{ có } \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4 - 8 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow g(x) = -x^2 + 4x - 8 < 0,\ \forall x \in R$

Bài 126. Xét dấu biểu thức sau : $f(x) = 2x^2 - x - 4$

GIẢI (vắn tắt)

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{33}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{33}}{4}$		$+\infty$
g(x)		+	0	–	0	+	

Bài 127. Xét dấu biểu thức : $g(x) = -16x^2 + 8x - 1$

GIẢI (vắn tắt)

$g(x) = -(4x - 1)^2 \leq 0,\ \forall x \in R$

Bài 128. Xét dấu biểu thức : $h(x) = 2x^2 + 4x + 5$

GIẢI

$$h(x) = 2x^2 + 4x + 5 \text{ có } \begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta' = 4 - 10 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow h(x) > 0,\ \forall x \in R$

Xét dấu tam thức bậc hai có dạng tích số : f(x) = (ax + b)(a'x + b')

Bài 129. Xét dấu tam thức : $f(x) = (2x - 1)(3x + 6)$

✶ *Hướng dẫn*

- Tìm nghiệm của f(x) (nghiệm của mỗi nhị thức)
- Lập bảng xét dấu (lưu ý hệ số của x^2 là a.a')

GIẢI

$$f(x) = (2x - 1)(3x + 6) \text{ có hai nghiệm là } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

(hệ số của x^2 là $6 > 0$)

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

Bài 130. Xét dấu tam thức : $g(x) = (2 - x)(4x + 1)$

GIẢI

$$g(x) = (2 - x)(4x + 1) \text{ có hai nghiệm là } \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

(hệ số của x^2 là $-4 < 0$)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
g(x)		–	0	+	0	–	

Bài 131. Xét dấu biểu thức : $P = 2x(3 - x)$

★ ***Hướng dẫn***

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

Bài 131. Xét dấu biểu thức : $Q = (4 - 2x)(5 - x)$

★ ***Hướng dẫn***

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
Q		$+$	0	$-$	0	$+$	

Xét dấu phân thức có dạng $P(x) = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$

- Tìm nghiệm của tử số và mẫu số.
- Dấu của $P(x) = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$ là dấu của $(ax + b)(a'x + b')$

Chú ý : Mẫu số = 0 thì P(x) không xác định.

Bài 133. Xét dấu biểu thức : $P(x) = \dfrac{2x - 5}{8 - x}$

GIẢI

- $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$
- $8 - x = 0 \Leftrightarrow x = 8$

Hệ số của x^2 là $- 2 < 0$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		8		$+\infty$
$P(x) = \dfrac{2x - 5}{8 - x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Bài 134. Xét dấu biểu thức : $Q(x) = \dfrac{1 - x}{2 - 3x}$

★ ***Hướng dẫn***

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$Q(x) = \dfrac{1 - x}{2 - 3x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Xét dấu biểu thức $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó P(x), Q(x) là các đa thức bậc nhất, bậc hai, bậc ba, ...

- Tìm nghiệm của P(x) và Q(x).
- Xét dấu P(x) và Q(x) trong cùng một bảng.
- Tìm dấu của f(x).

Bài 135. Xét dấu biểu thức : $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{4x - x^2}$

GIẢI

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{4x - x^2} \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$2x^2 - x - 3$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$4x - x^2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Bài 136. Xét dấu biểu thức : $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - x + 6}$

GIẢI

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{-x^2 - x + 6} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{-x^2 - x + 6}$$

- $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x^2 + x + 1$ có $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = 1 - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in R$

- $- x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Xét dấu : Dấu f(x) là dấu của $\dfrac{x-1}{-x^2-x+6}$ vì $x^2+x+1>0, \forall x \in R$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x^2-x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
f(x)		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Xét dấu biểu thức P(x) = A.B ...... hoặc P(x) = $\dfrac{A.B......}{C.D......}$

- Tìm các nghiệm phân biệt của biểu thức và sắp xếp các nghiệm này tuần tự lớn dần (tính từ trái qua phải, giả sử x_n là nghiệm lớn nhất trong các nghiệm).
- Tìm hệ số bậc cao nhất trong đa thức (gọi hệ số này là a)
- Khi $x \in (x_n; +\infty)$ thì đa thức cùng dấu với a.

x	$-\infty$ .... x_n	$+\infty$
P(x)	0 (cùng dấu với a)	

- Sau đó lần lượt đổi dấu khi x vượt qua mỗi nghiệm của đa thức.

Chú ý : (Dấu của $\dfrac{a}{b}$) ≡ (Dấu của ab)

Bài 137. Xét dấu biểu thức sau : P = $\dfrac{1}{x^2-7x+12} - \dfrac{1}{x^2-5x+4}$

GIẢI

$$P = \frac{1}{x^2-7x+12} - \frac{1}{x^2-5x+4}$$

$$= \frac{\left(x^2-5x+4\right)-\left(x^2-7x+12\right)}{\left(x^2-7x+12\right)\left(x^2-5x+4\right)} = \frac{2x-8}{\left(x^2-7x+12\right)\left(x^2-5x+4\right)}$$

$$= \frac{2(x-4)}{(x-3)(x-4)(x-1)(x-4)} = \frac{2}{(x-3)(x-1)(x-4)} \quad (x \neq 4)$$

- $(x-3)(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		1		3		4		$+\infty$
P		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Bài 138. Xét dấu biểu thức sau : P = $\dfrac{(2x-1)\left(x^3-1\right)}{x^2+x-2}$

★ Hướng dẫn

$$P = \frac{(2x-1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(2x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x+2} \quad (x \neq 1)$$

$$x^2+x+1 \text{ có } \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = 1-4 < 0 \end{cases} \Rightarrow x^2+x+1>0, \forall x \in R$$

$\Rightarrow$ Dấu của P là dấu của $\dfrac{2x-1}{x+2}$ (Xem bài 133, 134)

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
P		$+$	‖	$-$	0	$+$	

(x ≠ 1)

Bài 139. Xét dấu biểu thức : Q = $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{2x^2+x}$

★ Hướng dẫn

$$Q = \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{2x^2+x} = \frac{(x-1)\left(x^2-1\right)}{x(2x+1)} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x(2x+1)}$$

vì $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in R$ nên dấu của Q là dấu của $\dfrac{x+1}{x(2x+1)}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
Q		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$+$	

Bài 140. Xét dấu biểu thức : R = $\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{1}{x^2-2x-3}$

★ Hướng dẫn

$$R = \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{-2x+1}{\left(x^2-4\right)\left(x^2-2x-3\right)}$$

$$= \frac{-2x+1}{(x-2)(x+2)(x+1)(x-3)}$$

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
R		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	

Chuyên đề 10 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Kiến thức cơ bản

1) Định nghĩa

Bất phương trình bậc hai là bất phương trình có một trong bốn dạng sau : $(a \neq 0)$

$ax^2 + bx + c > 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c < 0$

$ax^2 + bx + c \geq 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c \leq 0$

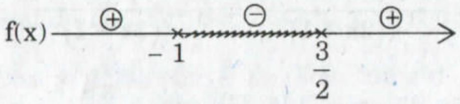
2) Cách giải

- Biến đổi bất phương trình về một trong bốn dạng trên.
- Xét dấu $ax^2 + bx + c$
- Chọn x thỏa mãn dấu bất đẳng thức trong bất phương trình.

Toán

Bài 141. Giải bất phương trình : $2x^2 - x - 3 > 0$

- **Bước 1 :** Tam thức $f(x) = 2x^2 - x - 3$ có hai nghiệm $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

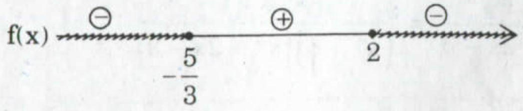


Vậy $2x^2 - x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \ \vee \ \dfrac{3}{2} < x$

Tập nghiệm của bất phương là : $S = (-\infty ; -1) \cup (\dfrac{3}{2} ; +\infty)$

Bài 142. Giải bất phương trình : $-3x^2 + x + 10 \geq 0$

- **Bước 1 :** Tam thức $f(x) = -3x^2 + x + 10$ có hai nghiệm $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$



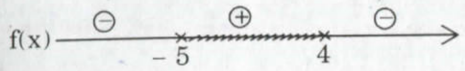
Vậy $-3x^2 + x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \leq x \leq 2$ (Trong trái)

Tập nghiệm của bất phương là : $S = [-\dfrac{5}{3} ; 2]$

Bài 143. Giải bất phương trình : $-x^2 - x + 20 < 0$

★ ***Hướng dẫn***

Tam thức $f(x) = -x^2 - x + 20$ có hai nghiệm là $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -5 \end{cases}$



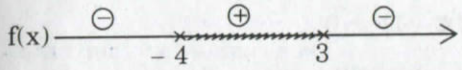
Vậy $-x^2 - x + 20 < 0 \Leftrightarrow x < -5 \ \vee \ 4 < x$ (ngoài cùng)

Tập nghiệm của bất phương trình là :

$$S = (-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$$

Bài 144. Giải bất phương trình : $-x^2 - x + 12 < 0$

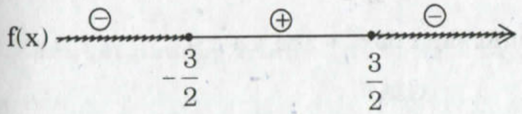
$f(x) = -x^2 - x + 12$



Đáp số : $x < -4 \ \vee \ 3 < x$ (ngoài cùng)

Bài 145. Giải bất phương trình : $9 - 4x^2 \geq 0$

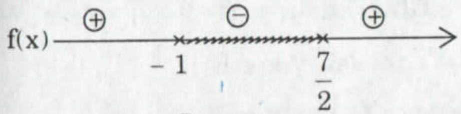
$f(x) = 9 - 4x^2$



Đáp số : $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ (trong trái)

Bài 146. Giải bất phương trình : $2x^2 - 5x - 7 > 0$

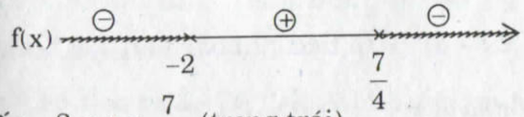
$f(x) = 2x^2 - 5x - 7$



Đáp số : $x < -1 \ \vee \ \dfrac{7}{2} < x$ (ngoài cùng)

Bài 147. Giải bất phương trình : $-4x^2 - x + 14 > 0$

$f(x) = -4x^2 - x + 14$



Đáp số : $-2 < x < \dfrac{7}{4}$ (trong trái)

Bài 148. Giải bất phương trình : $4x^2 - 4x + 1 > 0$

GIẢI

Tam thức $4x^2 - 4x - 1$ có nghiệm kép vì $\Delta' = 0$

Ta có $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

Vậy bất phương trình : $4x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = R \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Bài 149. Giải bất phương trình : $-9x^2 + 6x - 1 \geq 0$

GIẢI

$-9x^2 + 6x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -(3x - 1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (3x - 1)^2 \leq 0$ (điều này chỉ đúng khi dấu = xảy ra)

$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

Bài 150. Giải bất phương trình sau : $25x^2 + 20x + 4 \geq 0$

GIẢI

$25x^2 + 20x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (5x + 1)^2 \geq 0$ luôn đúng, $\forall x \in R$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = R$

Bài 151. Giải bất phương trình sau : $x^2 - 8x + 16 < 0$

GIẢI

$x^2 - 8x + 16 < 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 < 0$: sai, $\forall x \in R$

$\Rightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \varnothing$

Bài 152. Giải bất phương trình : $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

GIẢI

$4x^2 - 12x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 \leq 0$ (tương tự bài 149)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$. Vậy tập nghiệm là $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Bài 153. Giải bất phương trình : $3x^2 - 2x + 1 > 0$ (1)

GIẢI

Tam thức $3x^2 - 2x + 1$ có $\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 1 - 3 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in R$

Vậy bất phương trình (1) thỏa với mọi $x \in R$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = R$

Bài 154. Giải bất phương trình : $-x^2 + 2x - 8 > 0$ (2)

GIẢI

Tam thức $-x^2 + 2x - 8$ có $\begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 1 - 8 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -x^2 + 2x - 8 < 0, \forall x \in R$

Vậy bất phương trình (2) vô nghiệm

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = \varnothing$

Bài 155. Giải bất phương trình : $-4x^2 + 3x - 3 < 0$

✶ ***Hướng dẫn***

$-4x^2 + 3x - 3 < 0$ có tập nghiệm $S = R$ vì $-4x^2 + 3x - 3 < 0, \forall x \in R$

Bài 156. Giải bất phương trình : $2x^2 + 4x + 3 < 0$

✶ ***Hướng dẫn***

$2x^2 + 4x + 3 < 0$ vô nghiệm vì $2x^2 + 4x + 3 > 0, \forall x \in R$

Giải và biện luận bất phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c > 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c < 0$

$ax^2 + bx + c \geq 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c \leq 0$

- ***Tính và xét dấu Δ của tam thức vế trái $f(x) = ax^2 + bx + c$***
- ***Biện luận :***
    - ♦ ***$\Delta > 0$ xét dấu $f(x)$ và chọn nghiệm bất phương trình.***
    - ♦ ***$\Delta \leq 0$ xét dấu $f(x)$ và chọn nghiệm bất phương trình.***

Bảng biện luận

m	Δ	Dấu của $f(x) = ax^2 + bx + c$	Tập nghiệm bất phương trình
$-\infty$			
....		....	....
....		....	....
....		....	....
....		....	....
$+\infty$			

Chú ý :

Nếu a có chứa tham số thì phân biệt hai trường hợp :

- $a = 0$
- $a \neq 0$

Bài 157. Tùy theo m, giải và biện luận bất phương trình :

$$x^2 + (m-1)x + 1 > 0$$

GIẢI

$$x^2 + (m-1)x + 1 > 0$$

- Tam thức $f(x) = x^2 + (m-1)x + 1$

$\Delta = (m-1)^2 - 4 = m^2 - 2m - 3$

$$\begin{array}{c|ccccccc} m & -\infty & & -1 & & 3 & & +\infty \\ \hline \Delta & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$$

◆ Khi $\Delta > 0$, f(x) có hai nghiệm :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-(m-1) - \sqrt{m^2 - 2m - 3}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-(m-1) + \sqrt{m^2 - 2m - 3}}{2} \end{cases} \quad (x_1 < x_2)$$

◆ Giải và biện luận.

m	Δ	Dấu của f(x)	Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) > 0$
$-\infty$			
	+	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$	$S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
-1	0	$f(x) = (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in R$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$	$S = R\backslash\{1\}$
	−	$f(x) > 0, \forall x \in R$	$S = R$
3	0	$f(x) = (x+1)^2 \geq 0, \forall x \in R$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$	$S = R\backslash\{-1\}$
	+	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$	$S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
$+\infty$			

Bài 158. Biện luận theo m bất phương trình : $(m-1)x^2 - 2mx + (m+2) \leq 0$ (*)

GIẢI

♦ **Trường hợp 1 :** $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, bất phương trình (*) trở thành bất phương trình bậc nhất : $-2x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$

♦ **Trường hợp 2 :** $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Xét tam thức $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + (m+2)$

$\Delta' = m^2 - (m-1)(m+2) = -m + 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} m & -\infty & & 2 & & +\infty \\ \hline \Delta' & & + & 0 & - & \end{array}$$

- Khi $\Delta' > 0$ thì f(x) có hai nghiệm : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{m - \sqrt{-m+2}}{m-1} \\ x_2 = \dfrac{m + \sqrt{-m+2}}{m-1} \end{cases}$
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$
- $x_1 > x_2 \Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$
- Giải và biện luận

m	m − 1	Δ	Dấu f(x)	Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \le 0$
$-\infty$				
	−	+	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_2 & & x_1 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$	$S = (-\infty; x_2) \cup (x_1; +\infty)$
1	0		$f(x) = -2x + 3$ $f(x) = -2x + 3 \le 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{3}{2}$	$S = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$
	+	+	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$	$S = [x_1; x_2]$
2		0	$f(x) = (x - 2)^2$	Bất phương trình (*) $\Leftrightarrow (x - 2)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 2$ Vậy $S = \{2\}$
	+	−	$f(x) > 0, \forall x \in R$	$S = \varnothing$
$+\infty$				

Bài 159. Giải và biện luận bất phương trình : $x^2 - 2x + m - 3 \le 0$

∗ *Hướng dẫn* Giống bài 157.

Bài 160. Giải và biện luận bất phương trình : $mx^2 + 2(m - 1)x + (m - 2) > 0$

∗ *Hướng dẫn* Giống bài 158.

Bài 161. Tùy theo m, giải và biện luận bất phương trình :

$$x^2 - 3mx + 2m^2 + m - 1 \le 0 \quad (1)$$

∗ *Hướng dẫn*

Đặt f(x) = vế trái của bất phương trình (1)

- Tính Δ của f(x) rồi tìm nghiệm x_1, x_2 của f(x).
- So sánh x_1 và x_2 (xét dấu $x_1 - x_2$).
- Lập bảng biện luận

GIẢI

- Đặt $f(x) = x^2 - 3mx + 2m^2 + m - 1$

  Ta có $\Delta = 9m^2 - 4(2m^2 + m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 \ge 0$

  Vậy f(x) có hai nghiệm $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3m + m - 2}{2} = 2m - 1 \\ x_2 = \dfrac{3m - (m - 2)}{2} = m + 1 \end{cases}$

- So sánh x_1 và x_2 :

  Ta có $x_1 - x_2 = m - 2$

m	$-\infty$		2		$+\infty$
$x_1 - x_2$		−	0	+	
x_1 và x_2		$x_1 < x_2$	$x_1 = x_2$	$x_1 > x_2$	

- Giải và biện luận

m	Bất phương trình (1)
m < 2	có nghiệm $x_1 \le x \le x_2$ hay $2m - 1 \le x \le m + 1$
m = 2	trở thành : $x^2 - 6x + 9 \le 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 3$
m > 2	có nghiệm $x_2 \le x \le x_1$ hay $m + 1 \le x \le 2m - 1$

Bài 162. Tùy theo m, giải và biện luận bất phương trình :

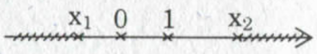
$$x^2 - (6m + 1)x + 2m(4m + 1) > 0$$

∗ *Hướng dẫn* Giải giống bài 161.

Bài 163. Xác định a để bất phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 < 0$ (*) có nghiệm $x \in (0; 1)$

∗ *Hướng dẫn*

- Đặt f(x) = vế trái của bất phương trình (*), ta dễ dàng tìm được hai nghiệm x_1, x_2 của f(x).
- Bất phương trình (*) $\Leftrightarrow x_1 < x < x_2$



- Theo đề bài ta phải có $x_1 \le 0 < 1 \le x_2$

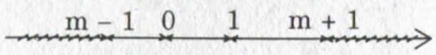
GIẢI

- Đặt $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$

  $\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0$

  Vậy f(x) có hai nghiệm : $x_1 = m - 1$; $x_2 = m + 1$ $(x_1 < x_2)$

- Bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (m - 1; m + 1)$ hay $m - 1 < x < m + 1$



- Bất phương trình (*) có nghiệm $x \in (0; 1) \Leftrightarrow (0; 1) \subset (m - 1; m + 1)$

$$\Leftrightarrow m - 1 \le 0 < 1 \le m + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \le 0 \\ m + 1 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$$

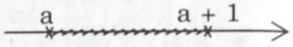
Bài 164. Cho bất phương trình : $x^2 - (2a + 1)x + (a^2 + a) > 0$ (1).

Xác định a để khoảng (2; 3) là một khoảng nghiệm của bất phương trình (1).

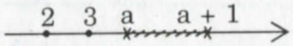
✶ *Hướng dẫn*

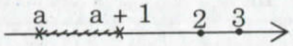
Giải giống bài 163.

- Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x < a \vee x > a + 1$



- Theo đề bài ta có : $\left[\begin{array}{l} \text{hoặc } 3 \le a \\ \text{hoặc } a + 1 \le 2 \end{array}\right.$





Đáp số : $a \ge 3 \vee a \le 1$

Bài 165. Cho bất phương trình : $x^2 - 2(m^2 + 1)x + (m^4 + 2m^2) \le 0$ (*)

Xác định m để bất phương trình (*) có nghiệm $x \in [1; 2]$

✶ *Hướng dẫn* Giải giống bài 163

Đáp số : $|m| \le 1$

Bài 166. Với những giá trị nào của a thì bất phương trình sau nhận khoảng (0; 1) làm một khoảng nghiệm : $x^2 - 2a^2x + (a^4 - 1) > 0$

✶ *Hướng dẫn* Giải giống bài 164

Đáp số : $a^2 - 1 \ge 1 \Leftrightarrow |a| \ge \sqrt{2}$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

(với tập xác định D = R)

- *Biến đổi hàm số về dạng* $Ax^2 + Bx + C = 0$ *(*)*
- *Xét* $A = 0$.
- $A \neq 0$, *điều kiện để phương trình (*) có nghiệm là :*

$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ ○ $\le y \le$ ■

Vậy $\begin{cases} \max\limits_{R}(y) = \blacksquare \\ \min\limits_{R}(y) = \bigcirc \end{cases}$

Bài 167. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$

GIẢI

$y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$ (Tập xác định D = R)

$\Leftrightarrow yx^2 + y = x^2 + 2x + 2$

$\Leftrightarrow (y - 1)x^2 - 2x + (y - 2) = 0$

- $y = 1 \Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$
- $y \neq 1 \Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (y - 1)(y - 2) \ge 0$

$\Leftrightarrow -y^2 + 3y - 1 \ge 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \le y \le \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Vậy $\min\limits_{R}(y) = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ và $\max\limits_{R}(y) = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Bài 168. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$$

✶ *Hướng dẫn* Giải giống bài 167

Đáp số : $\max\limits_{R}(y) = 9$ và $\min\limits_{R}(y) = -1$

Bài 169. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

✶ *Hướng dẫn* Giải giống bài 167

Đáp số :

Trên R, hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất = – 1

Bài 170. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = x^2 + 4x - 3$

GIẢI

$y = x^2 + 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - (3 + y) = 0$

$\Delta' = 4 + (3 + y) = 7 + y \ge 0 \Leftrightarrow y \ge -7$

Vậy $\min\limits_{R}(y) = -7$

Ghi chú : Hàm số này không có giá trị lớn nhất

- Cách khác :

$y = x^2 + 4x - 3 = (x + 2)^2 - 7 \geq -7, \forall x \in R$

Vậy $\min_R(y) = -7 \Leftrightarrow x = -2$

Bài 171. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = -x^4 - 4x^2 + 5$$

GIẢI

Ta có $y = -x^2(x^2 + 4) + 5$

Vì $-x^2(x^2 + 4) \leq 0, \forall x \in R$

Nên $y = -x^2(x^2 + 4) + 5 \leq 5$, (Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$)

Vậy $\max_R(y) = 5$ khi $x = 0$

Ghi chú : Hàm số này không có giá trị nhỏ nhất.

Bài 172. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số : $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$

★ *Hướng dẫn* Giải giống bài 167

Đáp số : $\max_R(y) = 6$ và $\min_R(y) = 1$

Bài 173.

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số : $y = -x^2 + 6x$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = 2x^4 + x^2 - 3$

★ ***Hướng dẫn***

a) Giải giống bài 170

Đáp số : $\max_R(y) = 9$ khi $x = 3$

b) Giải giống bài 171

Đáp số : $\min_R(y) = -3$ khi $x = 0$

Chuyên đề 11

XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ m ĐỂ TAM THỨC BẬC HAI CÓ DẤU KHÔNG THAY ĐỔI

Kiến thức cơ bản

Chứng minh một tam thức bậc hai luôn dương (hoặc luôn âm)

- $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$

Chú ý :

- $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$

Bài 174. Xác định m để bất phương trình : $x^2 + 2(m - 1)x + m + 5 > 0$ (1) nghiệm đúng với mọi $x \in R$

GIẢI

(1) $\Leftrightarrow \Delta' < 0$ (vì $a = 1 > 0$)

Mà $\Delta' = (m - 1)^2 - (m + 5) = m^2 - 3m - 4$

Nên : $m^2 - 3m - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 4$

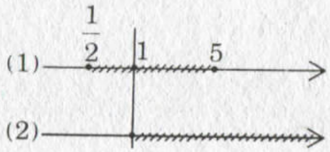
Bài 175. Xác định m để bất phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) \leq 0$ nghiệm đúng với mọi x

GIẢI

$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) \leq 0, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m + 1)^2 - 3(m - 1)(m - 2) \leq 0 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 + 11m - 5 \leq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \ \mathrm{V} \ 5 \leq m & (1) \\ m < 1 & (2) \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$$

Bài 176. **Cho bất phương trình : $x^2 + 2(m + 2)x - (m + 2) \le 0$**

Xác định m để bất phương trình vô nghiệm.

★ *Hướng dẫn*

Bất phương trình đã cho vô nghiệm

$\Leftrightarrow x^2 + 2(m + 2)x - (m + 2) > 0, \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \Delta' < 0$

Đáp số : $-3 < m < -2$

Bài 177. **Tìm a để biểu thức $\sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3}$ có nghĩa với mọi $x \in R$**

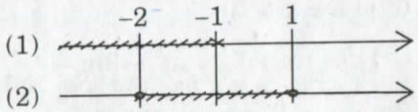
GIẢI

Biểu thức có ý nghĩa với mọi $x \in R$

$\Leftrightarrow (a + 1)x^2 - 2(a - 1)x + 3(a - 1) \ge 0, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ \Delta' = (a-1)^2 - 3(a-1)(a+1) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ \Delta' = (a-1)(-2a-4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 & (1) \\ a \le -2 \ \vee \ a \ge 1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow a \ge 1$$



Bài 178. **Xác định a để với mọi x ta luôn có : $-1 \le \dfrac{x^2 + 5x + a}{2x^2 - 3x + 2} < 7$ (1)**

★ *Hướng dẫn*

$2x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x \in R$ vì $\begin{cases} \Delta = 9 - 16 < 0 \\ a = 2 > 0 \end{cases}$.

- Biến đổi (1) về dạng $\begin{cases} A_1x^2 + B_1x + C_1 > 0, & \forall x \in R \\ A_2x^2 + B_2x + C_2 \ge 0, & \forall x \in R \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \ (A_1 > 0) \\ \Delta_2 \le 0 \ (A_2 > 0) \end{cases}.$$

GIẢI

- $2x^2 - 3x + 2$ có $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta = 9 - 16 < 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x \in R$

Vậy $-1 \le \dfrac{x^2 + 5x + a}{2x^2 - 3x + 2} < 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(2x^2 - 3x + 2) \le x^2 + 5x + a, & \forall x \in R \\ x^2 + 5x + a < 7(2x^2 - 3x + 2), & \forall x \in R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + (a + 2) \ge 0, & \forall x \in R \\ 13x^2 - 26x + (14 - a) > 0, & \forall x \in R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 = 1 - 3(a + 2) = -3a - 5 \le 0 \\ \Delta'_2 = (13)^2 - 13(14 - a) = 13(a - 1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -\dfrac{5}{3} \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \le a < 1$$

Bài 179. **Chứng minh : $2x^2 - 2(m - 1)x + (m^2 - 2m + 5) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in R$.**

GIẢI

- Tam thức $f(x) = 2x^2 - 2(m - 1)x + (m^2 - 2m + 5)$ có :

$\Delta' = (m - 1)^2 - 2(m^2 - 2m + 5) = -m^2 + 2m - 9$

$= -(m - 1)^2 - 8 < 0, \forall m \in R$

- Vậy f(x) có $\begin{cases} \Delta' < 0 \\ a = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in R$ (đpcm)

Chi chú : Ta có thể xét dấu $\Delta' = -m^2 + 2m - 9$ bằng cách khác.

$\Delta = -m^2 + 2m - 9$ có $\begin{cases} \Delta'_m = 1 - 9 < 0 \\ m^2 \text{ có hệ số } = -1 < 0 \end{cases}$

nên $-m^2 + 2m - 9 < 0, \forall m \in R$

Bài 180.

Xác định m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - (2m+1)x + 2m}$ có tập xác định D = R

★ ***Hướng dẫn***

Hàm số có tập xác định D = R $\Leftrightarrow x^2 - \dots\dots \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \Delta \leq 0$.

Đáp số : $m = \frac{1}{2}$

Chú ý : $\Delta = (2m+1)^2 - 8m = \dots\dots = (2m-1)^2$

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 \leq 0$: Điều này đúng khi và chỉ khi $2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

Bài 181. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 4x + a}{x^2 + 1}$. Xác định a để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 và giá trị lớn nhất bằng 6.

★ ***Hướng dẫn***

Ta phải có $1 \leq y \leq 6, \forall x \in R \Leftrightarrow 1 \leq \dots \leq 6, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + (a-1) \geq 0, & \forall x \in R \\ 4x^2 - 4x + (6-a) \geq 0, & \forall x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 \leq 0 \\ \Delta'_2 \leq 0 \end{cases}$$

Đáp số : a = 5

Chuyên đề 12

SO SÁNH SỐ α VỚI HAI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Kiến thức cơ bản

Phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ (*)

- $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (hay $\Delta' = b'^2 - ac \geq 0$)

– Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*) (giả sử $x_1 < x_2$).

– Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ (vế trái của phương trình (*))

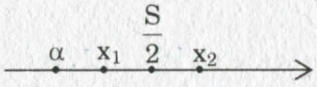
- **Định lí 1**

a.f(α) < 0 ⇔ Phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho : $x_1 < \alpha < x_2$

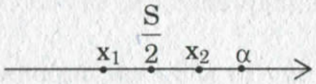
Hệ quả

$a.f(\alpha) < 0 \Rightarrow \Delta > 0$ (Do đó khi gặp $a.f(\alpha) < 0$ thì ta không tính Δ)

- **Định lí 2** **$a.f(\alpha) > 0, \Delta \geq 0$**

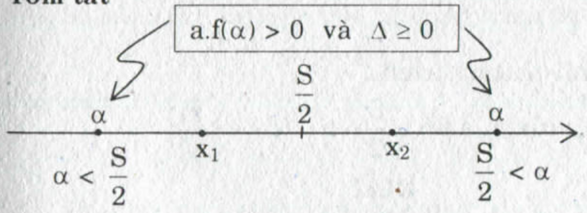


$\alpha < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \alpha < \frac{S}{2}$



$\alpha > x_2 \geq x_1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{S}{2}$

Tóm tắt

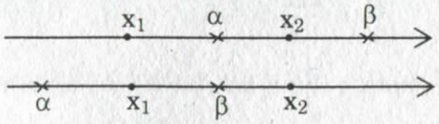


Đặc biệt $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = x_1$ (hoặc $\alpha = x_2$)

- **Định lí 3** (Giả sử α < β)

$f(\alpha).f(\beta) < 0 \Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho :

$$\left[\begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2 < \beta \\ \alpha < x_1 < \beta < x_2 \end{array}\right.$$



Cặp (x_1, x_2) và cặp $(\alpha; \beta)$ xen kẽ nhau

Hệ quả $f(\alpha).f(\beta) < 0 \Rightarrow \Delta > 0$ (Do đó khi gặp $f(\alpha).f(\beta) < 0$ thì ta không tính Δ)

So sánh số α với hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (*) \quad (a \neq 0)$$

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$

- ***Tìm dấu của*** $a.f(\alpha)$

– ***Nếu*** $a.f(\alpha) < 0$ ***thì kết luận : Phương trình (*) có hai nghiệm*** x_1, x_2 ***thỏa mãn*** $x_1 < \alpha < x_2$.

– ***Nếu*** $a.f(\alpha) > 0$ ***thì ta phải tính*** Δ ***(hoặc*** Δ'***) và*** $\frac{S}{2}$ ***rồi dùng định lí 2.***

Bài 182. Không giải phương trình, hãy so' sánh các nghiệm của phương trình $2x^2 - 8x + 3 = 0$ với số $\alpha = 1$.

✶ Hướng dẫn

- Đặt f(x) = vế trái phương trình.
- Tính $a.f(\alpha)$

GIẢI

Đặt $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$

Ta có : $2.f(1) = 2(2 - 8 + 3) = -6 < 0$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 1 < x_2$.

Bài 183. Không giải phương trình, hãy so sánh các nghiệm của phương trình $-3x^2 - x + 3 = 0$ với số $\alpha = -2$.

✶ Hướng dẫn

- Đặt f(x) = vế trái phương trình.
- Tính và tìm dấu của Δ, $a.f(\alpha)$, $\frac{S}{2} - \alpha$.

GIẢI

Đặt $f(x) = -3x^2 - x + 3$

a và c trái dấu ⇒ Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 (Giả sử $x_1 < x_2$)

Ta có : $\begin{cases} -3.f(-2) = -3(-12 + 2 + 3) > 0 \\ \frac{S}{2} = -\frac{1}{6} > -2 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn :

$$-2 < x_1 < x_2$$

Bài 184. Không giải phương trình, hãy so sánh các nghiệm của phương trình $x^2 - 7x + 4 = 0$ với số $\alpha = 7$.

✶ Hướng dẫn

- Đặt f(x) = vế trái phương trình.
- Tính và tìm dấu của Δ, $a.f(\alpha)$, $\frac{S}{2} - \alpha$.

GIẢI

$f(x) = x^2 - 7x + 4 \qquad (\Delta = 49 - 16 > 0)$

Ta có : $\begin{cases} 1.f(7) = 49 - 49 + 4 = 4 > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{7}{2} < 7 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn : $x_1 < x_2 < 7$

Bài 185. Không giải phương trình, hãy so sánh các nghiệm của phương trình $2x^2 - x - 5 = 0$ với số $\alpha = -1$ và số $\beta = 3$.

✶ Hướng dẫn

- Đặt f(x) = vế trái phương trình.
- Tính và tìm dấu của Δ, $a.f(\alpha)$, $\frac{S}{2} - \alpha$.

GIẢI

$f(x) = 2x^2 - x - 5$

Ta có : $\begin{cases} f(-1) = -2 \\ f(3) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.f(-1) < 0 \\ f(-1).f(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 < -1 < x_2 < 3$

Bài 186. So sánh hai nghiệm của phương trình $3x^2 - 5x - 1 = 0$ với số $\alpha = -2$

✶ Hướng dẫn $\begin{cases} 3.f(-2) > 0 \text{ và } \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} > -2 \end{cases} \Rightarrow -2 < x_1 < x_2$

Bài 187. So sánh hai nghiệm của phương trình $-x^2 + 4x + 2 = 0$ với số $\alpha = 3$

✶ Hướng dẫn

$-1.f(3) < 0 \Rightarrow x_1 < 3 < x_2$

Cần nhớ : *Khi* $a.f(\alpha) < 0$ *hoặc* $f(\alpha).f(\beta) < 0$ *thì ta không tính* Δ *(vì lúc đó hiển nhiên* $\Delta > 0$*)*

Bài 188. So sánh hai nghiệm của phương trình $2x^2 - 5x + 1 = 0$ với các số $\alpha = -1$ và $\beta = 1$

✶ Hướng dẫn

$\begin{cases} 2.f(-1) > 0 \\ 2.f(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x_1 < 1 < x_2$

Bài 189. Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm :

$$3x^2 - 2(m + 1)x + 2(m - 2) = 0$$

★ ***Hướng dẫn***

- Đặt f(x) = vế trái phương trình
- Phát hiện số α bằng cách viết f(x) dưới dạng :

  $f(x) = m.A(x) + B(x)$, rồi cho $A(x) = 0$
- Dùng định lí 1 $(a.f(\alpha) < 0)$

GIẢI

Đặt $f(x) = 3x^2 - 2(m + 1)x + 2(m - 2)$

$\Leftrightarrow f(x) = m(-2x + 2) + (3x^2 - 2x - 4)$ $\quad(-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1)$

$3.f(1) = -9 < 0 \Rightarrow$ Phương trình $3x^2 - 2(m + 1)x + 2(m - 2) = 0$ luôn có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 1 < x_2$.

Bài 190. Chứng minh rằng phương trình $mx^2 - 2(m + 1)x + 3(m + 1) = 0$ luôn có hai nghiệm với mọi $m \neq 0$

★ ***Hướng dẫn***

- Đặt f(x) = vế trái phương trình
- Phát hiện hai số α và β bằng cách viết f(x) dưới dạng :

  $f(x) = m.A(x) + B(x)$, rồi cho $A(x) = 0$
- Dùng định lí 3 : $(f(\alpha).f(\beta) < 0)$

GIẢI

Đặt $f(x) = mx^2 - 2(m + 1)x + 3(m + 1)$

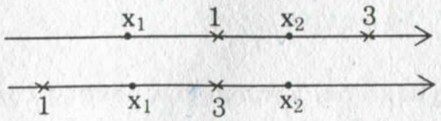
$\Leftrightarrow f(x) = m(x^2 - 4x + 3) + (3 - 2x)$

$(x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.)$

Ta có : $\begin{cases} f(1) = 3 - 2 = 1 \\ f(3) = 3 - 6 = -3 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(3) < 0$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho :

$\left[\begin{array}{l} x_1 < 1 < x_2 < 3 \\ 1 < x_1 < 3 < x_2 \end{array}\right.$



Bài 191. Cho a < b < c. Chứng minh rằng phương trình :

$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ luôn có hai nghiệm x_1, x_2. So sánh x_1, x_2 với a, b, c

★ ***Hướng dẫn***

- (Phương trình đã cho là phương trình bậc hai và x^2 có hệ số bằng 3)
- Đặt f(x) = vế trái của phương trình.
- Tính và tìm dấu của 3.f(a), 3.f(b), 3.f(c) rồi áp dụng các định lí ở phần kiến thức cơ bản. (Chú ý giả thiết a < b < c)

GIẢI

- Đặt $f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$

Ta có : $\begin{cases} 3.f(a) = 3(a - b)(a - c) > 0 \quad (1) \\ 3.f(b) = 3(b - c)(b - a) < 0 \quad (2) \\ 3.f(c) = 3(c - a)(c - b) > 0 \quad (3) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow 3.f(b) < 0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < b < c$ (đpcm)

So sánh x_1, x_2 với a, b, c

$\begin{cases} 3.f(a) > 0 \\ x_1 < b < x_2 \\ a < b \end{cases} \Rightarrow a < x_1 < b < x_2$

$\begin{cases} 3.f(c) > 0 \\ x_1 < b < x_2 \\ b < c \end{cases} \Rightarrow x_1 < b < x_2 < c$

Vậy $a < x_1 < b < x_2 < c$

Bài 192. Chứng minh phương trình sau luôn có hai nghiệm :

$$2x^2 + (m + 1)x + 2m - 7 = 0$$

★ ***Hướng dẫn*** $\quad 2.f(-2) < 0$

Bài 193. Chứng minh phương trình sau luôn có hai nghiệm :

$$(m - 1)x^2 - (m - 3)x - 1 = 0 \quad (m \neq 1)$$

★ ***Hướng dẫn*** $\quad f(0).f(1) < 0$

Xác định điều kiện của một tham số để một phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn một bất đẳng thức nào đó, chẳng hạn :

- $x_1 < x_2 < \alpha$
- $x_1 < \alpha < x_2$
- $\alpha < x_1 < x_2$

★ *Hướng dẫn*

Đặt f(x) = vế trái phương trình bậc hai.

Nếu đề bài yêu cầu	Ta giải hệ bất phương trình
$\alpha < x_1 < x_2$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} \end{cases}$
$x_1 < x_2 < \alpha$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha > \frac{S}{2} \end{cases}$
$x_1 < \alpha < x_2$	$a.f(\alpha) < 0$

Bài 194.Cho phương trình : $(m + 2)x^2 - 2(m + 8)x + 5(m - 2) = 0$ (1).

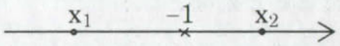
Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện : $x_1 < -1 < x_2$

GIẢI

$f(x) = (m + 2)x^2 - 2(m + 8)x + 5(m - 2)$

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$

$\Leftrightarrow (m + 2).f(-1) < 0$ (i)



Ta có : $f(-1) = (m + 2) + 2(m + 8) + 5(m - 2) = 8(m + 1)$

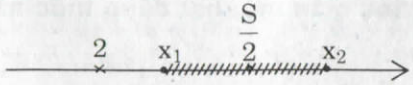
Vậy (i) $\Leftrightarrow 8(m + 2)(m + 1) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < -1$

Bài 195. Cho phương trình : $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m = 0$ (1).

Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện : $2 < x_1 \le x_2$

★ *Hướng dẫn*

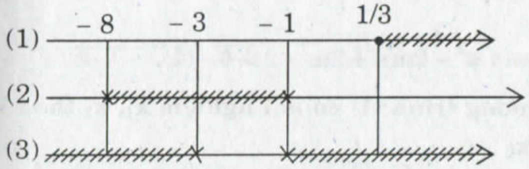
$f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m$



$$2 < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ (m+1).f(2) > 0 \\ 2 < \frac{S}{2} \end{cases} \text{ với } \begin{cases} m + 1 \ne 0 \\ \Delta' = -3m + 1 \\ f(2) = m + 8 \\ \frac{S}{2} = \frac{m-1}{m+1} \ (m \ne -1) \end{cases}$$

- $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m \le \frac{1}{3}$ (1)
- $(m + 1).f(2) > 0 \Leftrightarrow (m + 1)(m + 8) > 0 \Leftrightarrow m < -8 \vee m > -1$ (2)
- $2 < \frac{S}{2} \Leftrightarrow 2 < \frac{m-1}{m+1} \Leftrightarrow \frac{m-1}{m+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-m-3}{m+1} > 0$

$\Leftrightarrow -3 < m < -1$ (3)



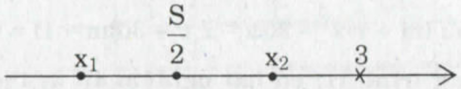
Vậy không có giá trị của m thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Bài 196. Cho phương trình : $x^2 - 2(m + 2)x - m = 0$ (1).

Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện : $x_1 < x_2 \le 3$

★ *Hướng dẫn*

$f(x) = x^2 - 2(m + 2)x - m$



$$x_1 < x_2 \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1.f(3) \ge 0 \\ \frac{S}{2} < 3 \end{cases}$$

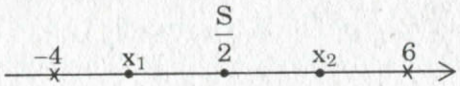
Đáp số : $m < -4$

Bài 197. Cho phương trình : $(m - 2)x^2 + 2(4 - 3m)x + 10m - 11 = 0$ (*).

Xác định m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện : $-4 < x_1 < x_2 < 6$

★ *Hướng dẫn*

$f(x) = (m-2)x^2 + 2(4-3m)x + 10m - 11$



$$-4 < x_1 < x_2 < 6 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta' > 0 \\ (m-2).f(-4) > 0 \\ (m-2).f(6) > 0 \\ -4 < \frac{S}{2} < 6 \end{array}\right.$$

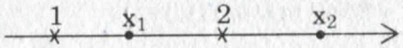
Đáp số : $1 < m < \frac{3}{2} \vee \frac{7}{2} < m < 6$

Bài 198. **Cho phương trình : $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ (1).**

Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện : $1 < x_1 < 2 < x_2$

★ *Hướng dẫn*

$f(x) = x^2 - 2mx + 3m - 2$



$$1 < x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1.f(2) < 0 \\ 1.f(1) > 1 \end{array}\right.$$

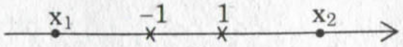
Đáp số : $m > 2$

Bài 199. **Cho phương trình : $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(2m-1) = 0$ (1).**

Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện : $x_1 < -1 < 1 < x_2$

★ *Hướng dẫn*

$f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(2m-1)$



$$x_1 < -1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (m+1).f(-1) < 0 \\ (m+1).f(1) < 0 \end{array}\right.$$

Đáp số : $-1 < m < 0$

Bài 200. **Cho hàm số bậc hai : $f(x) = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$**

a) Với giá trị nào của m thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm ≥ 1.

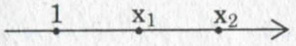
c) Khi phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A = |x_1x_2 - (x_1 + x_2)|$

★ *Hướng dẫn*

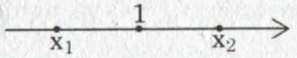
a) $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) \geq 0$

$\Leftrightarrow \Delta' = -m^2 - 6m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$

b) Theo yêu cầu của đề bài : Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $1 \leq x_1 \leq x_2$ hoặc $x_1 < 1 < x_2$



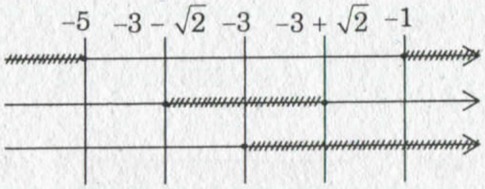
(hình 1)



(hình 2)

- Hoặc $1 \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta' \geq 0 \\ 2.f(1) \geq 0 \\ 1 \leq \frac{S}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5 \leq m \leq -1 \\ 2.f(1) = 2\left(m^2 + 6m + 7\right) \geq 0 \\ 1 \leq \frac{-(m+1)}{2} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5 \leq m \leq -1 \\ m \leq -3 - \sqrt{2} \vee m \geq -3 + \sqrt{2} \\ m \leq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -3 - \sqrt{2}$$



- Hoặc $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow 2.f(1) < 0 \Leftrightarrow 2(m^2 + 6m + 7) < 0$

c) $A = |x_1x_2 - (x_1 + x_2)| = \left|\frac{m^2 + 4m + 3}{2} + (m+1)\right|$

$= \frac{1}{2}|m^2 + 6m + 5| = \frac{1}{2}|(m+1)(m+5)| = \frac{1}{2}|m+1|.|m+5|$

mà $-5 \leq m \leq -1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m + 1 \leq 0 \Rightarrow |m+1| = -m-1 \\ m + 5 \geq 0 \Rightarrow |m+5| = m+5 \end{array}\right.$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{2}(-m-1)(m+5) \le \frac{1}{2}\left[\frac{(-m-1)+(m+5)}{2}\right]^2 = 2 \text{ (Côsi)}$$

hay $A \le 2 \Rightarrow$ A đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi :

$$-m - 1 = m + 5 \Leftrightarrow m = -3 \in [-5; -1]$$

Bài 201. Xác định m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 3m + 2 = 0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0; 1)

★ ***Hướng dẫn*** Đặt $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 3m + 2$

- **Trường hợp 1 :** Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 \in (0; 1)$
- **Trường hợp 2 :** Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó có duy nhất một nghiệm thuộc (0; 1)
- **Trường hợp 3 :** Phương trình có một nghiệm $x_1 = 0$ và nghiệm còn lại $x_2 \in (0; 1)$.
- **Trường hợp 4 :** Phương trình có một nghiệm $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại $x_2 \in (0; 1)$.

Đáp số :

- **Trường hợp 1 :** $\begin{cases} \Delta' = 0 \\ x_1 = x_2 = m \in (0;1) \end{cases}$

  Ta có : $m = \dfrac{1}{3}$

- **Trường hợp 2 :** $f(0).f(1) < 0$

  Ta có $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2} < m < 1 \ \vee \ 2 < m < \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$

- **Trường hợp 3 :** $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 < x_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ 0 < x_1 + x_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ 0 < S < 1 \end{cases}$

  Trường hợp này ta có $m \in \varnothing$

- **Trường hợp 4 :** $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 < x_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ 0 < x_1 + x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ 0 < S < 2 \end{cases}$

  Ta có : $m = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$

Tùy theo m so sánh số α với hai nghiệm của phương trình bậc hai

★ ***Hướng dẫn***

- Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ (vế trái của phương trình bậc hai)
- Tính và xét dấu Δ, $a.f(\alpha)$, $\dfrac{S}{2} - \alpha$
- Lập bảng biện luận theo sơ đồ sau :

m	Δ	$a.f(\alpha)$	$\frac{S}{2} - \alpha$	So sánh x_1, x_2 với α
......	......	......	......	......
......	......	......	......	......

Bài 202. So sánh số $\alpha = -1$ với hai nghiệm của phương trình

$$\mathbf{x^2 - 2(m+1)x + 4 = 0}$$

GIẢI

$$f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 4$$

- $\Delta' = (m+1)^2 - 4 = m^2 + 2m - 3$
- $1.f(-1) = 1 + 2(m+1) + 4 = 2m + 7$
- $\dfrac{S}{2} - (-1) = m + 1 + 1 = m + 2$

Bảng biện luận

m	Δ'	$1.f(-1)$	$\frac{S}{2} - (-1)$	So sánh x_1, x_2 với -1
$-\infty$				
	+	−	−	$x_1 < -1 < x_2$
$-\frac{7}{2}$		0		$x_1 = -4 < -1,\ x_2 = -1$
	+	+	−	$x_1 < x_2 < -1$
-3	0			$x_1 = x_2 = m + 1 = -2 < -1$
	−	+	−	Phương trình vô nghiệm
-2			0	
	−	+	+	
1	0			$x_1 = x_2 = m + 1 = 2 > -1$
	+	+	+	$-1 < x_1 < x_2$
$+\infty$				

$(x_1 = m + 1 - \sqrt{m^2 + 2m - 3} \le x_2 = m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m - 3})$

Bài 203. Tùy theo m, so sánh số $\alpha = 2$ với các nghiệm của phương trình :

$$x^2 + 2mx + (m + 2) = 0$$

✶ Hướng dẫn

Giải giống bài 202

Bài 204. Xác định a để phương trình $\dfrac{x^2 - 2(2a+1)x + (a+2)}{\sqrt{x-1}} = 0$ **(*) có nghiệm.**

✶ Hướng dẫn

- Phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2(2a+1)x + (a+2) = 0 \ \text{(i)} \\ x > 1 \end{cases}$
- Điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là phương trình (i) có nghiệm x > 1

GIẢI

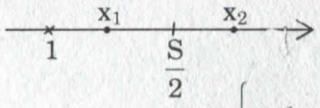
- Phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2(2a+1)x + (a+2) = 0 \ \text{(i)} \\ x > 1 \end{cases}$

Đặt $f(x) = x^2 - 2(2a + 1)x + (a + 2)$

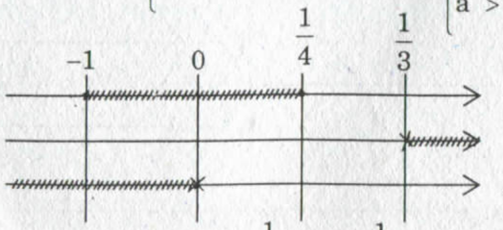
- $\begin{cases} \Delta' = (2a+1)^2 - (a+2) = 4a^2 + 3a - 1 \\ 1.f(1) = -3a + 1 \\ \dfrac{S}{2} - 1 = (2a+1) - 1 = 2a \end{cases}$

✪ Phương trình đã cho có nghiệm ⇔ Phương trình (i) có nghiệm x thỏa mãn điều kiện x > 1

- **Trường hợp 1 :**

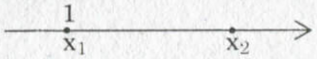


$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ 1.f(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 3a - 1 \geq 0 \\ -3a + 1 > 0 \\ 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -1 \ \text{V} \ a \geq \dfrac{1}{4} \\ a < \dfrac{1}{3} \\ a > 0 \end{cases}$$



Vậy $\dfrac{1}{4} < a < \dfrac{1}{3}$

- **Trường hợp 2 :** $1.f(1) < 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{3}$
- **Trường hợp 3 :** $1 = x_1 < x_2$



Phương trình (i) có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ S = x_1 + x_2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = -3a + 1 = 0 \\ S = 2(2a+1) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3}$$

Đáp số : Hợp ba trường hợp đã nêu, ta có : $a > \dfrac{1}{4}$

Bài 205. Cho phương trình $\dfrac{x^2 - 2(a-2)x + (a-2)}{\sqrt{2-x}} = 0$ **(*). Với những giá trị nào của a thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt.**

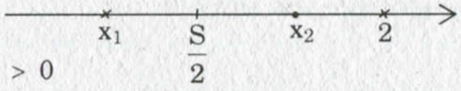
✶ Hướng dẫn

- Phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2(\text{.........})x \ \text{........} = 0 \quad \text{(i)} \\ x < 2 \end{cases}$

Đặt f(x) = ... (vế trái của (i))

- Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

⇔ Phương trình (i) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 < 2$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1.f(2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases}$$

Đáp số : $3 < a < \dfrac{10}{3}$

Bài 206. Xác định m để phương trình $\dfrac{x^2 - (4a-3)x - 1}{\sqrt{2-x}} + \sqrt{2-x} = 0$ **có hai nghiệm phân biệt.**

✶ Hướng dẫn

Giải giống bài 205 **Đáp số :** $a < 0$ hay $1 < a < \dfrac{9}{8}$

Bài 207. Cho phương trình $x^3 - 2(m + 2)x^2 + 4(m + 2)x - 8 = 0$ **(1)**

Xác định m để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

★ ***Hướng dẫn***

- Biến đổi phương trình (1) về dạng tích số $(x - \alpha)[x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha > 1 \\ x^2 \ldots\ldots\ldots = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đặt $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt, lớn hơn 1, khác α.

GIẢI

- Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x - 2)[x^2 - 2(m + 1)x + 4] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 > 1 \\ x^2 - 2(m+1)x + 4 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đặt $f(x) = x^2 - 2(m + 1)x + 4$

- Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 > 1$ và $x_1, x_2 \neq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1.f(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 1 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - 4 = (m+3)(m-1) > 0 \\ 1.f(1) = -2m + 3 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = m + 1 > 1 \\ f(2) = -4m + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \ \vee \ m > 1 \\ m < \dfrac{3}{2} \\ m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}$$

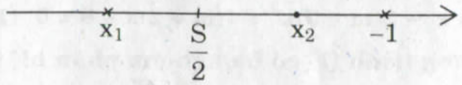
Bài 208. Cho phương trình $x^3 - (a - 2)x^2 - (2a - 5)x + 10 = 0$ (1)

Với những giá trị nào của a thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt và nhỏ hơn – 1.

★ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 207

- Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 < -1 \\ x^2 - ax + 5 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$



- Đặt $f(x) = x^2 - ax + 5$, ta phải có $\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1.f(-1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < -1 \\ f(-2) \neq 0 \end{cases}$

Đáp số : $-6 < a < -2\sqrt{5}$ và $a \neq -\dfrac{9}{2}$

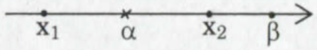
Bài 209. Cho hai phương trình $\begin{cases} \mathbf{x^2 + 3x + 2m = 0 \ (1)} \\ \mathbf{x^2 + 6x + 5m = 0 \ (2)} \end{cases}$

Tìm m để mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt và trên khoảng hai nghiệm của phương trình này có đúng một nghiệm của phương trình kia.

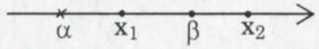
★ ***Hướng dẫn***

- Đặt f(x) = vế trái của (1) và g(x) = vế trái của (2).
- Điều kiện để mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt ($\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$)
- Gọi x_1, x_2 và α, β lần lượt là hai nghiệm của (1) và (2)

Theo yêu cầu đề bài ta có



hoặc



Vậy $f(\alpha).f(\beta) < 0$ (hoặc $g(x_1).g(x_2) < 0$)

GIẢI

- Đặt $f(x) = x^2 + 3x + 2m$ và $g(x) = x^2 + 6x + 5m$
- Điều kiện để mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt là :

$$\begin{cases} \Delta_1 = 9 - 8m > 0 \\ \Delta'_2 = 9 - 5m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{9}{8} \\ m < \dfrac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{8}$$

- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) và α, β là hai nghiệm của phương trình (2).

– Theo đề bài ta phải có $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ hay $\alpha < x_1 < \beta < x_2$.

Vậy $f(\alpha).f(\beta) < 0$

- Với $f(\alpha) = \alpha^2 + 3\alpha + 2m = (\alpha^2 + 6\alpha + 5m) - 3(\alpha + m) = -3(\alpha + m)$

  (Vì α là nghiệm phương trình (2) nên $\alpha^2 + 6\alpha + 5m = 0$)

- Tương tự : $f(\beta) = -3(\beta + m)$.

  Vậy $f(\alpha).f(\beta) = 9(\alpha + m)(\beta + m) = 9[\alpha.\beta + m(\alpha + \beta) + m^2]$

  Mà α, β là hai nghiệm của (2) nên $\alpha.\beta = 5m$ và $\alpha + \beta = -6$.

  Do đó $f(\alpha).f(\beta) = 9(5m - 6m + m^2) = 9(m^2 - m) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$

  (thỏa mãn điều kiện $m < \frac{9}{8}$)

Đáp số : $0 < m < 1$

Bài 210. Cho hai phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3m = 0 \\ x^2 - 6x + 8m = 0 \end{cases}$

Xác định m để mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt và trên khoảng hai nghiệm của phương trình này có duy nhất một nghiệm của phương trình kia.

✶ *Hướng dẫn*

Giải giống bài 209

Đáp số : $0 < a < \frac{28}{25}$

Chuyên đề 13

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Kiến thức cơ bản

Có hai cách giải :

- **Cách 1 :** Xét dấu biểu thức nằm trong dấu trị tuyệt đối rồi làm mất dấu trị tuyệt đối để tìm phương trình hoặc bất phương trình tương đương.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

- **Cách 2 :** Sử dụng tính chất : $|a|^2 = a^2$

  Vài phương trình, bất phương trình thường gặp :

- $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B^2 \end{cases}$ hay $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \\ B \geq 0 \end{cases}$

- $|A| \geq B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B \leq 0 \\ \begin{cases} B > 0 \\ A^2 \geq B^2 \end{cases} \end{array}\right.$

- $|A| \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 \leq B^2 \end{cases}$

Bài 211. Giải phương trình : $x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0$ **(1)**

✶ *Hướng dẫn*

- Xét dấu $x - 1$
- Tìm phương trình tương đương (làm mất dấu trị tuyệt đối), giải phương trình này và chọn nghiệm thích hợp

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$\lvert x - 1\rvert$		$-x + 1$	0	$x - 1$	

Có ba trường hợp :

- $x \leq 1$

  Lúc đó : $x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5(-x + 1) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = -6$

Cả hai nghiệm này đều nhận được vì thỏa mãn điều kiện $x \le 1$

- $x > 1$

Lúc đó : $x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 - 5(x - 1) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 4$ (nhận $x = 4$)

Tóm lại, tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-6, 1, 4\}$

Bài 212. Giải phương trình : $|x| + x + 1 = |3 - 2x|$ (*)

✶ *Hướng dẫn*

- Xét dấu x và 3 – 2x
- Tìm phương trình tương đương (làm mất dấu trị tuyệt đối).
- Giải phương trình tương đương và chọn nghiệm

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x		–	0	+	|	+	
3 – 2x		+	|	+	0	–	

- $x \in (-\infty; 0] : (*) \Leftrightarrow -x + x + 1 = 3 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \notin (-\infty; 0]$
- $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] : (*) \quad \Leftrightarrow \quad x + x + 1 = 3 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$
- $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) : (*) \Leftrightarrow \quad x + x + 1 = -3 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad 0.x = -4$ (!)

Kết luận : Tập nghiệm của phương trình (*) là $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Bài 213. Giải phương trình : $|3x + 4| = |x - 2|$ (1)

✶ *Hướng dẫn*

$$|A| = |B| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$$

GIẢI

$$|3x + 4| = |x - 2| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 3x + 4 = x - 2 \\ 3x + 4 = -x + 2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}$

Bài 214. Giải phương trình : $2x^2 - 3|x - 1| + 1 = 0$ (j)

✶ *Hướng dẫn*

Giải giống bài 211.

Đáp số : Tập nghiệm của phương trình (j) là $S = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

Bài 215. Giải phương trình : $|3x^2 - 2| = |16 - x^2|$ (i)

✶ *Hướng dẫn*

Giải giống bài 212.

Đáp số : Tập nghiệm của phương trình (i) là $S = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$

Bài 216. Giải phương trình : $x|x + 2| - |x - 1| + x = 0$ (*)

✶ *Hướng dẫn*

Giải giống bài 213.

Đáp số : Tập nghiệm của phương trình (*) là $S = \left\{-2 + \sqrt{5}\right\}$

Bài 217. Giải bất phương trình $|5 - 4x| \ge 2x - 1$

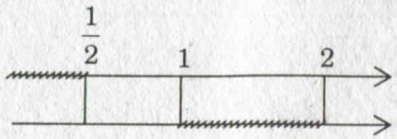
✶ *Hướng dẫn*

$$|A| \ge B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} B \le 0 \\ \begin{cases} B > 0 \\ A^2 \ge B^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

GIẢI

$$|5 - 4x| \ge 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} 2x - 1 \le 0 & (1) \\ \begin{cases} 2x - 1 \ge 0 \\ (5 - 4x)^2 \ge (2x - 1)^2 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

- $(1) \quad \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2} \qquad$ (I)
- $(2) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ 12x^2 - 36x + 24 \ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x \le 1 \ \vee \ x \ge 2 \end{cases}$



Vậy $\frac{1}{2} \le x \le 1 \text{ V } x \ge 2$ (II)

$$\left[\begin{array}{l}(I)\\(II)\end{array}\right. \Leftrightarrow x \le 1 \text{ V } x \ge 2$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $S = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

Bài 218. Giải bất phương trình : $x + 5 > |x^2 + 4x - 12|$

★ ***Hướng dẫn***

- **Cách 1 :** $A > |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ A^2 > B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ (A - B)(A + B) > 0 \end{cases}$
- **Cách 2 :** Xét dấu $x^2 + 4x - 12$ rồi tìm bất phương trình tương đương.

GIẢI

- **Cách 1 :** $x + 5 > |x^2 + 4x - 12| \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 > 0 \\ (x + 5)^2 > \left(x^2 + 4x - 12\right)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ (x + 5)^2 - \left(x^2 + 4x - 12\right)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ \left(x + 5 + x^2 + 4x - 12\right)\left(x + 5 - x^2 - 4x + 12\right) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ \left(x^2 + 5x - 7\right)\left(-x^2 - 3x + 17\right) > 0 \end{cases} \quad \text{(Học sinh giải tiếp)}$$

- **Cách 2 :** Xét dấu $x^2 + 4x - 12$

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$x^2 + 4x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $x \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$, ta có bất phương trình $x + 5 > x^2 + 4x - 12$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 17 < 0$

- $x \in [-6; 2]$, ta có bất phương trình :

$x + 5 > -x^2 - 4x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 7 > 0$

Đáp số : $\frac{-5 + \sqrt{53}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{77}}{2}$

Bài 119. Giải bất phương trình : $2|x + 3| > x + 6$

★ ***Hướng dẫn***

$$|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B \le 0 \\ \begin{cases} B > 0 \\ A^2 \ge B^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Đáp số : $x < -4 \text{ V } x > 0$

Bài 120. Giải bất phương trình : $\left|\frac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 2}\right| \le 1$

★ ***Hướng dẫn***

$$\left|\frac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 2}\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 2} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(x^2 + x + 2\right) \le x^2 - 4x \\ x^2 - 4x \le x^2 + x + 2 \end{cases}$$

Chú ý : $x^2 + x + 2 > 0, \forall x \in R$

Đáp số : $x \ge -\frac{2}{5}$

Bài 221. Giải bất phương trình : $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} \ge 1 - x$ (*)

★ ***Hướng dẫn***

Chú ý : $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (1 - x^2)^2$

- Biến đổi bất phương trình về bất phương trình có dấu trị tuyệt đối.
- Xét dấu $1 - x$ và giải.

GIẢI

$$\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x \Leftrightarrow \sqrt{\left(1 - x^2\right)^2} \ge 1 - x$$

$$\Leftrightarrow |1 - x^2| \ge 1 - x \Leftrightarrow |1 - x|.|1 + x| \ge 1 - x$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	0	$-$	

x	$1 - x$	Bất phương trình (*) $\Leftrightarrow |1 - x|.|1 + x| \geq 1 - x$	Tập nghiệm của bất phương trình (*)
$x < 1$	$\oplus$	Trở thành $|1 + x| \geq 1$ $\Leftrightarrow (1 + x)^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0$ $\Leftrightarrow x \leq -2 \text{ V } x \geq 0$	$S_1 = (-\infty; -2] \cup [0; 1)$
$x = 1$	0	$0 \geq 0$ Đúng	$S_2 = \{1\}$
$x > 1$	$-$	Bất phương trình $\underbrace{|1 - x|.|1 + x|}_{\oplus} \geq \underbrace{1 - x}_{\ominus}$: Đúng	$S_3 = (1; +\infty)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là :

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty ; -2] \cup [0 ; +\infty)$

Bài 222. Xác định m để phương trình sau có nghiệm :

$$2m\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x^2 - 2x + m + 3 = 0 \quad (*)$$

Hướng dẫn

- $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \ldots\ldots\ldots = |x - 1|$
- $x^2 - 2x + m = (x - 1)^2 + m - 1$
- Đặt $t = |x - 1|$, điều kiện $t \geq 0$.

  Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình ………… (ẩn số t) có nghiệm $t \geq 0$

GIẢI

- Phương trình (*) $\Leftrightarrow 2m\sqrt{(x - 1)^2} + (x - 1)^2 + m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + 2m|x - 1| + m + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = |x - 1| \; (\text{Điều kiện } t \geq 0) \\ t^2 + 2mt + (m + 2) = 0 \quad (i) \end{cases}$$

Đặt $f(t) = t^2 + 2mt + (m + 2)$

- Phương trình đã cho có nghiệm x $\Leftrightarrow$ Phương trình (i) có nghiệm t thỏa mãn điều kiện $t \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{hoặc phương trình (i) có hai nghiệm } t_1, t_2 \geq 0 \\ \text{hoặc phương trình (i) có hai nghiệm } t_1, t_2 \text{ sao cho } t_1 \leq 0 \leq t_2 \end{array}\right.$$

- **Trường hợp 1:**

$$t_1, t_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 \geq 0 \\ P = t_1.t_2 = m + 2 \geq 0 \\ S = t_1 + t_2 = -2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \text{ V } m \geq 2 \\ m \geq -2 \\ m \leq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1$

- **Trường hợp 2 :** $t_1 \leq 0 \leq t_2 \Leftrightarrow t_1.t_2 \leq 0 \Leftrightarrow m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$

  Hợp hai trường hợp trên ta có $\mathbf{m \leq -1}$

Bài 223. Cho phương trình $x^2 - 2(2m - 1)|x| + (3m^2 - 2) = 0$ (1).

Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 > 2$

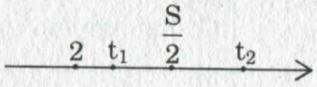
Hướng dẫn

- Đặt $t = |x|$ $(x \geq 2 \Leftrightarrow t \geq 2)$

  Phương trình (1) $\Leftrightarrow t^2 - 2(2m - 1)t + (3m^2 - 2) = 0$ (i)

- Điều kiện để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \geq 2$ là phương trình (i) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 \geq 2$

$$\text{Vậy} \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1.f(2) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} > 2 \end{cases}$$



Đáp số : $m > 3$

Bài 224. Tùy theo m, giải và biện luận phương trình

$$(x - 2) + m|x - 2| - 2m = 0 \quad (1)$$

Hướng dẫn

- Xét hai trường hợp : $x - 2 \geq 0$, $x - 2 \leq 0$
- Biến đổi phương trình (1) về phương trình không chứa dấu trị tuyệt đối.
- Giải và biện luận.

GIẢI

$x \ge 2 \Leftrightarrow \lvert x-2 \rvert = x-2$	$x \le 2 \Leftrightarrow \lvert x-2 \rvert = 2-x$
(1) $\Leftrightarrow x - 2 + m(x-2) = 2m$ $\Leftrightarrow (m+1)x = 4m + 2$ (i) • $m = -1 \Rightarrow$ (i) vô nghiệm • $m \neq -1 \Rightarrow$ (i) có nghiệm : $x = \dfrac{2(2m+1)}{m+1}$ Xét dấu $x - 2 = \dfrac{2(2m+1)}{m+1} - 2$ $= \dfrac{2m}{m+1}$ $\begin{array}{c\|ccccccc} m & -\infty & & -1 & & 0 & & +\infty \\ \hline x-2 & & + & \\| & - & 0 & + & \\\\ \hline x \text{ và } 2 & & x>2 & \\| & x<2 & x=2 & x>2 & \end{array}$	(1) $\Leftrightarrow x - 2 + m(2-x) = 2m$ $\Leftrightarrow (1-m)x = 2$ (ii) • $m = 1 \Rightarrow$ (ii) vô nghiệm • $m \neq 1 \Rightarrow$ (ii) có nghiệm : $x = \dfrac{2}{1-m}$ Xét dấu $x - 2 = \dfrac{2}{1-m} - 2$ $= \dfrac{2m}{1-m}$ $\begin{array}{c\|ccccccc} m & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline x-2 & & - & 0 & + & 0 & - & \\\\ \hline x \text{ và } 2 & & x<2 & x=2 & x>2 & \\| & x<2 & \end{array}$

Tổng kết

m	Phương trình đã cho
$m < -1$ V $m > 1$	Có hai nghiệm : $x = \dfrac{2(2m+1)}{m+1}$, $x = \dfrac{2}{1-m}$
$m = -1$	Có một nghiệm : $x = 1$
$m = 1$	Có một nghiệm : $x = 3$
$-1 < m < 0$	Có một nghiệm : $x = \dfrac{2}{1-m}$
$m = 0$	Có một nghiệm : $x = 2$
$0 < m < 1$	Có một nghiệm : $x = \dfrac{2(2m+1)}{m+1}$

Bài 225. Giải và biện luận a theo phương trình : $a\lvert x \rvert - x + a = 0$

★ Hướng dẫn Giải giống bài 224

Chuyên đề 14

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC

Không có phương pháp chung cho việc giải phương trình, bất phương trình có chứa căn thức

Tuy nhiên, để giải được phương trình, bất phương trình có chứa căn thức ta cần chú ý một số kiến thức cơ bản sau :

Phương trình có chứa căn thức	Phương trình có chứa căn thức
♦ $\sqrt{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \ge 0$ ♦ Hai vế luôn cùng dấu (Tổng quát : Hai vế của phương trình luôn có cùng một giá trị) • Bình phương hai vế để tìm phương trình tương đương (hoặc chọn ẩn số phụ) • Giải phương trình tương đương này. **Dạng cơ bản :** $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$	♦ $\sqrt{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \ge 0$ (Chú ý : hai vế không bắt buộc cùng dấu) a) Nếu hai vế khác dấu thì ta kiểm tra dấu bất đẳng thức (của bất phương trình) đúng hay sai. b) Nếu hai vế cùng dấu thì ta bình phương hai vế để tìm bất phương trình tương đương và giải bất phương trình tương đương này **Dạng cơ bản :** $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \ge 0 \\ B < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B^2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$

Bài 226. Giải phương trình : $x - \sqrt{2x+7} = 4$

GIẢI

Ta có : $x - \sqrt{2x+7} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+7} = x - 4$ (dạng $\sqrt{A} = B$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \ge 0 \\ 2x + 7 = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ x^2 - 10x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 < 4 \\ x = 9 > 4 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{9\}$

Bài 227. Giải phương trình : $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} = 3$

GIẢI

$$\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} = 3$$

- Điều kiện $\begin{cases} 3x+4 \ge 0 \\ x-3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{4}{3} \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3$
- Tìm phương trình tương đương :

$\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3x+4} = 3 + \sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ 3x+4 = 9 + 6\sqrt{x-3} + x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ 6\sqrt{x-3} = 2x - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ 3\sqrt{x-3} = x - 1 \end{cases}$

(dạng $\sqrt{A} = B$ trong đó $B = x - 1 > 0$ vì $x \ge 3$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ 9(x-3) = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 - 11x + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 > 3 \\ x = 7 > 3 \end{array} \right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là S = {4, 7}

Bài 228. Giải phương trình $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3}$ (1)

GIẢI

Điều kiện $\begin{cases} 5x-1 \ge 0 \\ 3x-2 \ge 0 \\ 2x-3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{5} \\ x \ge \dfrac{2}{3} \\ x \ge \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{3}{2}$

Nhận xét

Ta có : $3x - 2 > 2x - 3 \Leftrightarrow x + 1 > 0$ đúng vì $x \ge \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3} > 0$

Tìm phương trình tương đương :

Từ điều kiện và nhận xét trên, ta có :

$$5x - 1 = \left(\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3}\right)^2 = 3x - 2 - 2\sqrt{(3x-2)(2x-3)} + 2x - 3$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(3x-2)(2x-3)} = -4$: vô nghiệm vì $\begin{cases} \text{vế trái} = \sqrt{(3x-2)(2x-3)} \ge 0 \\ \text{vế phải} = -4 < 0 \end{cases}$

Cách khác : Phương trình $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5x-1} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow (5x-1) + \sqrt{(5x-1)(2x-3)} + (2x-3) = 3x - 2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(3x-2)(2x-3)} = 2 - 4x$, phương trình này vô nghiệm vì :

$\begin{cases} \bullet \ \text{vế trái} = \sqrt{(3x-2)(2x-3)} \ge 0 \ \left(\text{điều kiện } x \ge \dfrac{3}{2}\right) \\ \bullet \ \text{vế phải} = 2 - 4x < 0 \ \left(\text{vì } x \ge \dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$

Bài 229. Giải phương trình $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

∗ Hướng dẫn

Chọn ẩn số phụ $t = x^2 - 2x$

Ta sẽ có phương trình $\sqrt{6t+7} =$ .... (dạng $\sqrt{A} = B$)

GIẢI

- Ta có : $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{6\left(x^2 - 2x\right) + 7} = x^2 - 2x$

- Chọn ẩn số phụ : $t = x^2 - 2x$

Ta có phương trình : $\sqrt{6t+7} = t$ (dạng $\sqrt{A} = B$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ 6t + 7 = t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 - 6t - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 < 0 & \text{(loại)} \\ t = 7 > 0 & \text{(nhận)} \end{array} \right.$

- $t = 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - 2\sqrt{2} \\ x = 1 + 2\sqrt{2} \end{array} \right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\}$

Bài 230. Giải phương trình : $\sqrt{x^2 - 3x - 1} + 7 = 2x$

∗ Hướng dẫn Dạng $\sqrt{A} = B$

Đáp số : x = 5

Bài 231. Giải phương trình : $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+2} = 1$

∗ Hướng dẫn

Điều kiện : x ≥ ....

Bình phương hai vế rồi đưa về dạng $\sqrt{A} = B$.

Đáp số : Phương trình vô nghiệm.

Bài 232. Với giá trị nào của m thì phương trình $2x - 4 = 3\sqrt{x - m}$ có nghiệm.

✶ Hướng dẫn

- Dạng $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- Biến đổi phương trình về phương trình bậc hai với điều kiện $x \geq 2$
- Sử dụng các định lí ở chuyên đề 13.

GIẢI

$3\sqrt{x - m} = 2x - 4$ (dạng $\sqrt{A} = B$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ 9(x - m) = (2x - 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 25x + 9m + 16 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có ít nhất một nghiệm $x \geq 2$.

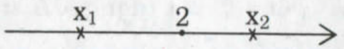
Vậy ta có một trong hai trường hợp sau :

* $x_1 < 2 < x_2$ * $2 \leq x_1 \leq x_2$

(x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*)), $x_1 \leq x_2$

Đặt $f(x) = 4x^2 - 25x + 9m + 16$

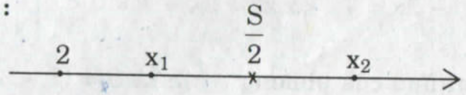
◆ **Trường hợp 1 :**



$$x_1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow 4.f(2) < 0 \Leftrightarrow f(2) < 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 50 + 9m + 16 < 0 \Leftrightarrow m < 2 \quad (1)$$

◆ **Trường hợp 2 :**



$$2 \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 4.f(2) \geq 0 \\ 2 < \dfrac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (25)^2 - 16(9m + 16) \geq 0 \\ f(2) \geq 0 \\ 2 < \dfrac{25}{2} \text{ (hiển nhiên)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{41}{16} \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq \frac{41}{16} \qquad \text{Vậy } \left[\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\right. \Leftrightarrow m \leq \frac{41}{16}$$

Kết luận : Khi $m \leq \dfrac{41}{16}$ thì phương trình có nghiệm.

Bài 233. Xác định m để phương trình $x + m = 2\sqrt{x + 3}$ có nghiệm

✶ Hướng dẫn Giải giống bài 232

Đáp số : $m < 4$

Bài 234. Giải bất phương trình sau : $\sqrt{2x + 1} < 2x - 3$

✶ Hướng dẫn

$$\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A \geq 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x - 1} < 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ 2x + 1 < (2x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ 4x^2 - 14x + 8 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ 2x^2 - 7x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x < \dfrac{7 - \sqrt{17}}{4} \ \vee \ x > \dfrac{7 + \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{7 + \sqrt{17}}{4}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $S = \left(\dfrac{7 + \sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$

Bài 235. Giải bất phương trình : $2x + \sqrt{x - 4} \geq 16$

✶ Hướng dẫn

$$\sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2x + \sqrt{x - 4} \geq 16 \Leftrightarrow \sqrt{x - 4} \geq 16 - 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ 16 - 2x \leq 0 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} 16 - 2x \geq 0 \\ x - 4 \geq (16 - 2x)^2 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 8$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ 4x^2 - 65x + 260 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ \dfrac{65-\sqrt{65}}{8} \le x \le \dfrac{65+\sqrt{65}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{65-\sqrt{65}}{8} \le x \le 8$$

Đáp số : Hợp (I), (II), ta có : $x \ge \dfrac{65-\sqrt{65}}{8}$

Bài 236. Giải phương trình sau : $\sqrt{(x-1)(x-5)} \le 8 - x$

✶ ***Hướng dẫn***

Dạng $\sqrt{A} \le B$

Đáp số : $x \le \dfrac{59}{10}$

Bài 237. Giải phương trình sau : $x - \sqrt{3-2x} < 0$

✶ ***Hướng dẫn***

Dạng $\sqrt{A} > B$

Đáp số : $x < 1$

Bài 238. Giải bất phương trình $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} > \sqrt{x-3}$

✶ ***Hướng dẫn***

- Điều kiện để $\sqrt{A}$ xác định ($\sqrt{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \ge 0$)
- Chuyển về dạng $\sqrt{x-1} > \sqrt{x-3} + \sqrt{x-2}$ rồi bình phương hai vế, sau đó đưa về dạng $\sqrt{A} < B$

GIẢI

$\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} > \sqrt{x-3}$ (1)

Điều kiện $\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-2 \ge 0 \\ x-3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3$

Tìm bất phương trình tương đương (với điều kiện $x \ge 3$)

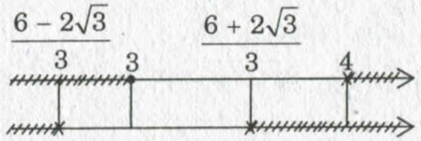
(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} > \sqrt{x-3} + \sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow x - 1 > x - 3 + x - 2 + 2\sqrt{(x-3)(x-2)}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(x-2)} < 4 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \\ x \ge 3 \\ 4(x-3)(x-2) < (4-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x < 4 \\ 3x^2 - 12x + 8 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x < 4 \\ \dfrac{6-2\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[3; \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$

Bài 239. Giải bất phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} \le \sqrt{5}$ **(*)**

✶ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 238

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \\ \text{.........} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \\ \sqrt{x(x-5)} \le 5 - x \end{cases}$

Đáp số : $x = 5$

Bài 240. Giải bất phương trình : $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+5}$

✶ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 238

Đáp số : $-1 \le x \le \dfrac{-7+\sqrt{29}}{2}$

Bài 241. Giải bất phương trình : $\sqrt{x^2+2x+2} + x^2 \ge 4 - 2x$

✶ ***Hướng dẫn***

Ẩn số phụ : $t = x^2 + 2x$

Đưa về dạng $\sqrt{A} \ge B$

GIẢI

$\sqrt{x^2+2x+2} + x^2 \ge 4 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2} \ge 4 - 2x - x^2$

Đặt $t = x^2 + 2x$ ta có bất phương trình :

$$\sqrt{t+2} \geq 4-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t+2 \geq 0 \\ 4-t < 0 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} 4-t \geq 0 \\ t+2 \geq (4-t)^2 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

- (I) $\Leftrightarrow t > 4$
- (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ t^2 - 9t + 14 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 2 \leq t \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 4$

Vậy $\left[\begin{array}{l} (I) \\ (II) \end{array}\right. \Leftrightarrow t \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -1 - \sqrt{3}$ V $x \geq -1 + \sqrt{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là :

$S = (-\infty ; -1 - \sqrt{3}\,] \cup [-1 + \sqrt{3} ; +\infty)$

Bài 242. Giải bất phương trình : $\sqrt{\dfrac{1-2x}{2+x}} + \sqrt{\dfrac{2+x}{1-2x}} > 2$

★ Hướng dẫn

Đặt ẩn số phụ $t = \sqrt{\dfrac{1-2x}{2+x}}$ $\begin{cases} \bullet \text{ Điều kiện } t > 0 \\ \bullet\ \dfrac{1}{t} = \sqrt{\dfrac{2+x}{1-2x}} \end{cases}$

Ta có bất phương trình : $t + \dfrac{1}{t} > 2\ (t > 0) \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2 > 0 \Leftrightarrow t \neq 1$

$$\sqrt{\frac{1-2x}{2+x}} \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2x}{2+x} > 0 \\ \dfrac{1-2x}{2+x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < \dfrac{1}{2} \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Bài 243. Giải bất phương trình $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 9$

★ Hướng dẫn

- Vế phải $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$
- Xét dấu $x - 3$ và $x + 3$ trong một bảng xét dấu chung.
- Tìm bất phương trình tương đương.

GIẢI

$(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 9 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x^2+4} \leq (x-3)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x − 3		−		−	0	+	
x + 3		−	0	+		+	

$-x$	$x-3$	$x+3$	Bất phương trình $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq (x-3)(x+3)$	Tập nghiệm
$x < -3$	−	−	Trở thành $\sqrt{x^2+4} > x+3$ đúng vì $\sqrt{x^2+4} > 0$, $x+3 < 0$	$S_1 = (-\infty; -3)$
$x = -3$	-6	0	Trở thành $-6\sqrt{13} \leq 0$ đúng	$S = \{-3\}$
$-3 < x < 3$	⊖	⊕	Trở thành $\sqrt{x^2+4} \geq x+3$ (hai vế đều dương) $\Leftrightarrow x^2 + 4 \geq (x+3)^2$ $\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{6}$	$S_2 = (-3; -\dfrac{5}{6}\,]$
$x = 3$	0	6	Trở thành $0 \leq 0$: đúng	$S_3 = \{3\}$
$x > 3$	⊕	⊕	Trở thành $\sqrt{x^2+4} \leq x+3$ (hai vế đều dương) $\Leftrightarrow x^2 + 4 \leq (x+3)^2$ $\Leftrightarrow x \geq -\dfrac{5}{6}$	$S_4 = (3; +\infty)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là :

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = (-\infty; -\dfrac{5}{6}\,] \cup [3; +\infty)$

Bài 244.

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

b) Sử dụng kết quả đã tìm được để giải phương trình :

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$$

★ ***Hướng dẫn***

a) Sử dụng bất đẳng thức Côsi.

- Điều kiện để hàm số xác định.
- $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$
- Chứng minh y ≤ hằng số (kiểm tra dấu = xảy ra)

b) Giải phương trình $\begin{cases} VT \le 2 \\ VP \ge 2 \end{cases}$

GIẢI

a) **Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$**

- Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 4$
- Theo bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} = \sqrt{(x-2)1} \le \dfrac{(x-2)+1}{2} = \dfrac{x-1}{2} \quad (1) \\ \sqrt{4-x} = \sqrt{(4-x)1} \le \dfrac{(4-x)+1}{2} = \dfrac{5-x}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Vậy $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \le \frac{x-1}{2} + \frac{5-x}{2} = 2$

$y \le 2$ nên $y_{LN} = 2 \Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1) và (2) đồng thời xảy ra.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \\ 4-x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Kết luận : $y_{Max} = 2$ khi $x = 3$

b) Ứng dụng kết quả trên để giải phương trình

$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$ (*)

- Vế trái $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \le 2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$)
- Vế phải $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$)

Vậy (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Bài 245. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$

★ ***Hướng dẫn***

- Biến đổi về dạng $\sqrt{A} = B$
- Nhờ điều kiện $\begin{cases} A \ge 0 \\ B \ge 0 \end{cases}$ ta sẽ có $x \in (a; b)$

- Chọn x nguyên và $x \in (a ; b)$
- Thử lại (phần đảo)

GIẢI

- $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36 \quad \Leftrightarrow 12\sqrt{x+1} = -x^2 - x + 36$
- Ta phải có $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ -x^2 - x + 36 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le \frac{-1+\sqrt{145}}{2} = 5{,}520...$

Vì x nguyên nên ta chọn : $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,\}$.

- Thử lại
- $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 5$ đều không nghiệm đúng phương trình đã cho.
- $x = 3$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là $S = \{3\}$

Bài 246. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$

★ ***Hướng dẫn***

- Chọn ẩn số phụ $\begin{cases} a = \sqrt[3]{x-1} \\ b = \sqrt[3]{x-2} \end{cases}$
- Ta có : $a + b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$, giải phương trình này để tìm a, b từ đó tính được x.

GIẢI

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{x-1} \\ b = \sqrt[3]{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = x-1 \\ b^3 = x-2 \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = 2x - 3$

Vậy phương trình đã cho trở thành $a + b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$

$\Leftrightarrow (a+b)^3 = a^3 + b^3 \Leftrightarrow a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = a^3 + b^3$

$$\Leftrightarrow 3ab(a+b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ a = -b \end{array}\right.$$

- $a = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $b = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $a = -b \Leftrightarrow x - 1 = -(x-2) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1, 2, \frac{3}{2}\}$

Bài 247. Giải phương trình $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2+2x+1$ (*)

★ Hướng dẫn

- Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$
- Biến đổi phương trình về phương trình bậc hai, ẩn số t.

GIẢI

Phương trình (*) $\Leftrightarrow (4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2(x^2+1)+(2x-1)$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ $(t \geq 1)$

Ta có $(4x-1)t = 2t^2+2x-1 \Leftrightarrow 2t^2-(4x-1)t+(2x-1) = 0$

$\Delta = (4x-1)^2 - 8(2x-1) = 16x^2 - 24x + 9 = (4x-3)^2$

$$\text{Vậy } t = \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4x-1+4x-3}{4} = 2x-1 \\ t = \dfrac{4x-1-(4x-3)}{4} = \dfrac{1}{2} < 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

- $t = 2x-1$ (1) (mà $t \geq 1$ nên $2x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$)

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x-1$ $(x \geq 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = (2x-1)^2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-4x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

Cách khác : $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2+2x+1$ (*)

- Điều kiện.

  Ta thấy $\begin{cases} x^2+1 > 0, \ \forall x \in R \\ 2x^2+2x+1 > 0, \ \forall x \in R \end{cases}$ nên điều kiện đối với phương trình (*) là $4x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{4}$ (hai vế của phương trình luôn cùng dấu)

- Biến đổi tương đương (kèm điều kiện $x > \dfrac{1}{4}$)

$(4x-1)^2(x^2+1) = (2x^2+2x+1)^2$

$\Leftrightarrow (16x^2-8x+1)(x^2+1) = 4x^4+4x^4+1+2(4x^3+2x+2x^2)$

$\Leftrightarrow 12x^4 - 16x^3 + 9x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(12x^3 - 16x^2 + 9x - 12) = 0$

$\Leftrightarrow x[4x^2(3x-4)+3(3x-4)] = 0 \Leftrightarrow x(3x-4)(4x^2+3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 < \dfrac{1}{4} \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{4}{3} > \dfrac{1}{4} \text{ (nhận)} \\ 4x^2+3 > 0 : \text{ vô nghiệm} \end{array}\right.$$

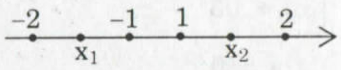
Đáp số : Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

Bài 248. Tìm những số nguyên a và b sao cho phương trình $x^2+ax+b = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện $-2 < x_1 < -1$ và $1 < x_2 < 2$

★ Hướng dẫn

Đặt $f(x) = x^2+ax+b$

- Theo đề bài ta có : $\begin{cases} 1.f(-1) < 0 \\ 1.f(1) < 0 \\ 1.f(-2) > 0 \\ 1.f(2) > 0 \end{cases}$



- Suy ra a và b bằng cách chứng minh $a \in (\alpha ; \beta)$ và a nguyên (tương tự đối với b)
- Thử lại.

GIẢI

Đặt $f(x) = x^2+ax+b$

- Theo giả thiết : Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $-2 < x_1 < -1$ và $1 < x_2 < 2$ nên ta có :

$$\begin{cases} 1.f(-1) < 0 \\ 1.f(1) < 0 \\ 1.f(-2) > 0 \\ 1.f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b < -1 & (1) \\ a+b < -1 & (2) \\ -2a+b > -4 & (3) \\ 2a+b > -4 & (4) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2b < -2 \Rightarrow b < -1$

$(3)+(4) \Rightarrow 2b > -8 \Rightarrow b > -4$

$$\text{Vậy } \left.\begin{array}{c} -4 < b < -1 \\ \text{mà b nguyên} \end{array}\right\} \Rightarrow b = -2 \text{ hoặc } b = -3$$

- $b = -2$ thay vào $\begin{cases} \text{(2) ta có } \ a-2 < -1 \Leftrightarrow a < 1 \\ \text{(4) ta có } \ 2a-2 > -4 \Leftrightarrow a > -1 \end{cases}$

Vậy $-1 < a < 1$ mà a nguyên $\Rightarrow a = 0$

Đảo lại, $\begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}$ thì phương trình đã cho là : $x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \end{array}\right.$ hai nghiệm này thỏa mãn giả thiết.

◆ b = – 3 thay vào $\begin{cases} (3) \text{ ta có } -2a - 3 > -4 \\ (4) \text{ ta có } \quad 2a - 3 > -4 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{1}{2} \\ a \text{ nguyên} \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0$

Đảo lại, a = 0 và b = – 3 thì phương trình đã cho là : $x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{array}\right.$ hai nghiệm này thỏa mãn giả thiết.

Đáp số : $\begin{cases} a = 0 \\ \left[\begin{array}{l} b = -2 \\ b = -3 \end{array}\right. \end{cases}$

Bài 249. Tìm a và b sao cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x^2 + 1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng – 1.

★ ***Hướng dẫn***

- Biến đổi hàm số về dạng phương trình bậc hai có ẩn số x ($x \in R$)
- Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$ từ đó ta được : $y_1 \leq y \leq y_2$
- Vậy $y_1 = -1$ và $y_2 = -4$ ⇒ a, b ....

GIẢI

Hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x^2 + 1}$ (Tập xác định D = R)

$\Leftrightarrow \; yx^2 - ax + y - b = 0 \quad (*)$

◆ **Trường hợp 1 :** y = 0, lúc đó phương trình (*) trở thành ax + b = 0.

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \neq 0 \\ a = b = 0 \end{array}\right.$

◆ **Trường hợp 2 :** $y \neq 0$

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm là :

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4y(y - b) = -4y^2 + 4by + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow y_1 \leq y \leq y_2$

(y_1 và y_2 là hai nghiệm của tam thức bậc hai : $-4y^2 + 4by + a^2$)

Vậy $\begin{cases} \min\limits_{R}(y) = y_1 = -1 \\ \max\limits_{R}(y) = y_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 . y_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ -\dfrac{a^2}{4} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ |a| = 4 \end{cases}$

Bài 250. Tùy theo m, giải và biện luận phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = x - m$

★ ***Hướng dẫn***

Phương trình $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

- Tìm phương trình tương đương.
- Tính và xét dấu Δ', 1.f(m), $\dfrac{S}{2} - m$
- Lập bảng biện luận

GIẢI

$\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x - m \geq 0 \\ 2x^2 - 2x + 1 = (x - m)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x^2 - 2(1 - m)x + (1 - m^2) = 0 \quad (1) \end{cases}$

- Đặt $f(x) = x^2 - 2(1 - m)x + 1 - m^2$

  $\Delta' = (1 - m)^2 - (1 - m^2) = 2m^2 - 2m$

  $1.f(m) = m^2 - 2m(1 - m) + 1 - m^2 = 2m^2 - 2m + 1 > 0, \forall m \in R$

  $\dfrac{S}{2} - m = (1 - m) - m = 1 - 2m$

- Biện luận

  Khi $\Delta' \geq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm :

  $\begin{cases} x_1 = 1 - m - \sqrt{2m^2 - 2m + 1} \\ x_2 = 1 - m + \sqrt{2m^2 - 2m + 1} \end{cases} \quad (x_1 \leq x_2)$

  Ta có $x_1 \leq x_2$

m	Δ'	1.f(m)	$\frac{S}{2} - m$	Phương trình (1)	Phương trình đã cho
$-\infty$	+			Có hai nghiệm x_1, x_2 : $m < x_1 < x_2$	Có hai nghiệm x_1 và x_2
		+	+		
0	0			$x_1 = x_2 = 1 - m = 1 > m$	Có nghiệm x = 1
	−	+	+		
$\frac{1}{2}$			0	Vô nghiệm	Vô nghiệm
	−	+	−		
1	0			$x_1 = x_2 = 1 - m = 0 < m$	Vô nghiệm
	+	+	−	Có hai ghiệm x_1, x_2 $x_1 < x_2 < m$	Vô nghiệm
$+\infty$					

Chuyên đề 15 TỔNG HỢP CUỐI NĂM

A. KIỂM TRA KIẾN THỨC VỀ HÀM SỐ

Bài 251. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a ; b). Lấy $x_1, x_2 \in (a\,;\,b)$ và đặt $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ $(x_1 \neq x_2)$. Biết hàm số y = f(x) đồng biến trên khoảng (a ; b). Câu nào sau đây sai ?

a) $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} > 0$ c) $x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$

b) $(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) > 0$ d) $(y_1 - y_2)(x_1 - x_2) > 0$

★ *Hướng dẫn*

Theo định nghĩa hàm số đồng biến ta có $x_1 - x_2$ và $y_1 - y_2$ cùng dấu Vậy câu d sai.

Bài 252. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ $(x \neq -1)$. Đặt y = g(x) = f(x + 1).

Câu nào sau đây đúng ?

a) $g(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$ b) $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$ c) $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$ d) $g(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$

★ *Hướng dẫn* $g(x) = f(x + 1) = \dfrac{2(x + 1) - 1}{(x + 1) + 1}$

Đáp số : $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$ (câu c)

Bài 253. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho hàm số $y = f(x) = -x^2 - 2x + 5$. Câu nào sau đây sai ?

a) **Đồ thị hàm số là parabol có đỉnh S(− 1; 6)**

b) **$f(2) = -3$**

c) **$f(-x) = x^2 + 2x + 5$**

d) **Trục đối xứng của đồ thị hàm số là đường thẳng x = − 1**

★ *Hướng dẫn*

Câu c sai vì $f(-x) = -(-x)^2 - 2(-x) + 5 = -x^2 + 2x + 5$

Đáp số : Câu c.

Bài 254. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho hàm số y = f(x) có tập xác định $D_1 = (-3\,;\,5]$ và hàm số y = g(x) có tập xác định $D_2 = (0\,;\,6)$.

Tập xác định của hàm số y = f(x) + g(x) là :

a) (− 3 ; 6) b) (− 3 ; 0) c) [0 ; 5) d) (0 ; 5]

★ *Hướng dẫn*

Tìm $D_1 \cap D_2$

Đáp số : (0; 5] (câu d)

Bài 255. **(Câu hỏi trắc nghiệm)**

Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn trên tập xác định của nó.

a) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

★ *Hướng dẫn*

Hàm số f(x) chẵn trên tập xác định D của nó

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x), \forall x \in D \end{cases}$$

Đáp số : $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ (câu b)

Bài 256. **(Câu hỏi trắc nghiệm)**

Hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x^2-4x+a-1}$ **có tập xác định D = R\\{2}. Tính a ?**

a) $a = 5$ **b)** $a = -5$ **c)** $a = 4$ **d)** $a = -4$

★ *Hướng dẫn*

Hàm số không xác định ⇔ x = 2

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + a - 1 = 0$ khi $x = 2 \Leftrightarrow a = 5$

Đảo lại a = 5 ta có $y = \dfrac{2x-1}{(x-2)^2}$ có tập xác định D = R\\{2}

Đáp số : a = 5 (Câu a)

Bài 257. **(Câu hỏi trắc nghiệm)**

Biết hàm số y = f(x) là hàm số lẻ trên tập D = [– a; a], a > 0.

Xét hàm số $y = g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. **Câu nào sau đây đúng ?**

a) **y = g(x) là hàm số lẻ trên đoạn [– a; a]**

b) **y = g(x) là hàm số lẻ trên tập [– a ; 0) ∪ (0 ; a]**

c) **y = g(x) là hàm số chẵn trên đoạn [– a ; a]**

d) **y = g(x) là hàm số chẵn trên tập [– a ; 0) ∪ (0 ; a]**

★ *Hướng dẫn*

- y = g(x) có tập xác định D = [– a ; a]\\{0} = [– a ; 0) ∪ (0 ; a]
- $g(-x) = \dfrac{f(-x)}{-x} = \dfrac{-f(x)}{-x} = \dfrac{f(x)}{x} = g(x)$

Đáp số : Hàm số y = g(x) là hàm số chẵn trên D (câu d)

Bài 258. **(Câu hỏi trắc nghiệm)**

Tìm tập giá trị của hàm số $y = -x^2 - 4x + 1$

a) (– ∞; 5] **b)** [5; + ∞) **c)** (– ∞; – 3] **d)** [– 3; + ∞)

★ *Hướng dẫn*

Hàm số $y = 1 - (x^2 + 4x) = \text{..............} = 5 - (x+2)^2 \le 5$

Đáp số : Tập giá trị của hàm số là D = (– ∞; 5]

Bài 259. **(Toán tự luận)**

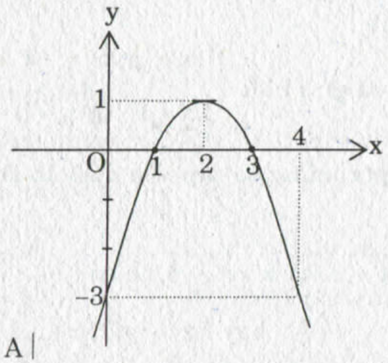
a) **Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số** $y = -x^2 + 4x - 3$

b) **Tìm m để phương trình** $|x^2 - 4x + 3| - m = 0$ **có đúng bốn nghiệm.**

★ *Hướng dẫn*

a)

x	– ∞		2		+ ∞
y	– ∞	↗	1	↘	– ∞



b) Ta có | – A | = | A |

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow |-x^2 + 4x - 3| = m$

- Vẽ đồ thị hàm số $y_2 = |-x^2 + 4x - 3|$ suy từ đồ thị hàm số $y_1 = -x^2 + 4x - 3$

Xét dấu $(-x^2 + 4x - 3)$

x	– ∞		1		3		+ ∞
$-x^2 + 4x - 3$		–	0	+	0	–	

- $x \le 1 \lor x \ge 3 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 \le 0$

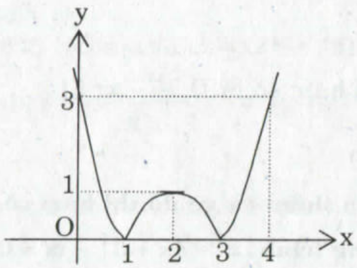
$\Leftrightarrow |-x^2 + 4x - 3| = -(-x^2 + 4x - 3) \Leftrightarrow y_2 = -y_1$

Vậy đồ thị hàm số y_2 đối xứng qua Ox của đồ thị hàm số y_1 khi $x \le 1 \lor x \ge 3$

- $1 \le x \le 3 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 \ge 0$

$$\Leftrightarrow |-x^2 + 4x - 3| = -x^2 + 4x - 3 \Leftrightarrow y_2 = y_1$$

Vậy đồ thị hàm số $y_2 \equiv$ đồ thị hàm số y_1 khi $1 \le x \le 3$



Phương trình đã cho có đúng bốn nghiệm $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số y_2 tại bốn điểm phân biệt.

Đáp số : $0 < m < 1$

Bài 260. (Toán tự luận)

Tìm hai hàm số f(x) và g(x) biết $\begin{cases} f(x) + g(x) = -2 \quad (1) \\ f(x+1) - g(x+1) = 6\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \quad (x \ne 0) \quad (2) \end{cases}$

(Hai hàm số f(x) và g(x) cùng có tập xác định là D).

∗ *Hướng dẫn*

Từ (2), đặt $t = x + 1 \Leftrightarrow x = t - 1$, ta có :

$f(t) - g(t) = 6\left(1 + \dfrac{1}{t-1}\right)$ hay $f(x) - g(x) = \text{.................}$ (3)

Giải hệ $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$ ta được kết quả $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} \\ g(x) = \dfrac{-4x+1}{x-1} \end{cases}$

B. KIỂM TRA CÁC KIẾN THỨC VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bài 261. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Xác định m để bất phương trình $(m^2 - 2)x < m(x + 3) - 1$ vô nghiệm ?

a) $m = -1$ b) $m = 2$ c) $-1 < m < 2$ d) Đáp số khác

∗ *Hướng dẫn*

Biến đổi bất phương trình về dạng $Ax < B$ rồi cho $A = 0$ và $B \ge 0$

Đáp số : $m = 2$ (Câu b)

Bài 262. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho bất phương trình $m^2(x - 1) \ge x - 4m + 2$. Với giá trị nào của m thì tập nghiệm của bất phương trình là S = R ?

a) $m = 1$ b) $m = -1$ c) $|m| = 1$ d) $m = 0$

∗ *Hướng dẫn*

Biến đổi bất phương trình về dạng $Ax \ge B$ rồi cho $A = 0$ và $B \le 0$

Đáp số : $m = 1$ (câu a)

Bài 263. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho phương trình $(x - 1)(x + 4)(x - 2)(x - 7) = m$ (1)

Nếu đặt $t = x^2 - 3x + 2$ thì phương trình (1) trở thành :

a) $t^2 - 26t - m = 0$ c) $t^2 - 30t - m = 0$

b) $t^2 + 26t - m = 0$ d) $t^2 + 30t - m = 0$

∗ *Hướng dẫn* Viết lại phương trình (1) : $(x - 1)(x - 2)(\text{.........})(\text{.........}) = m$

Đáp số : $t^2 - 30t - m = 0$ (câu c)

Bài 264. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Biểu diễn phương trình $x^4 - 2x^3 + (2m - 1)x^2 + 2x + 1 = 0$ thành phương trình ẩn số $t = x - \dfrac{1}{x}$? $(x \ne 0)$.

a) $t^2 - 2t + 2m - 3 = 0$ c) $t^2 - 2t + 2(m + 1) = 0$

b) $t^2 - 2t + 3m - 1 = 0$ d) Một phương trình khác

∗ *Hướng dẫn*

Viết lại phương trình (chia hai vế của phương trình cho $x^2 \ne 0$) :

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) + (2m - 1) = 0$$

Đáp số : $t^2 - 2t + 2m + 1 = 0$ (câu d)

Bài 265. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Phương trình $\sqrt{x^2 - 4} = 2x - m$ tương đương với hệ nào sau đây ?

a) $\begin{cases} |x| \ge 2 \\ 3x^2 - 4mx + m^2 + 4 = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} |x| \ge 2 \\ 3x^2 - 4mx + 4 - m^2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \ge \dfrac{m}{2} \\ 3x^2 - 4mx + 4 + m^2 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \ge \dfrac{m}{2} \\ 3x^2 - 4mx + 4 - m^2 = 0 \end{cases}$

★ *Hướng dẫn*

Phương trình $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

Đáp số : $\begin{cases} |x| \ge 2 \\ 3x^2 - 4mx + 4 + m^2 = 0 \end{cases}$ (Câu b)

Bài 266. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Phương trình $m(x - 1) = 4 - 3x$ có nghiệm $x \in (2 ; +\infty)$ khi :

a) $-3 < m < 2$ **b)** $-2 < m < 3$

c) $2 < m < 3$ **d)** $-3 < m < -2$

★ *Hướng dẫn*

Biến đổi phương trình về dạng Ax = B rồi xét :

- $A = 0 \Rightarrow$ ....
- $A \ne 0 \Rightarrow x = \dfrac{m+4}{m+3} > 2$

Đáp số : $-3 < m < -2$ (Câu d)

Bài 267. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Giả sử phương trình bậc hai $x^2 + ax + b = 0$ $(b \ne 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2.

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$?

a) $bx^2 - ax + 1 = 0$ **c)** $bx^2 - ax - 1 = 0$

b) $bx^2 + ax + 1 = 0$ **d)** $bx^2 + ax - 1 = 0$

★ *Hướng dẫn*

Tính $S = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1.x_2} =$ .... và $P = \dfrac{1}{x_1}.\dfrac{1}{x_2} =$ ....

Đáp số : $bx^2 + ax + 1 = 0$ (câu b)

Bài 268. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Phương trình $(m - 1)x^2 - 2x + 3 + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi :

a) $m < -3$ **b)** $m < 1$ **c)** $-3 < m < 1$ **d)** $-1 < m < 3$

★ *Hướng dẫn*

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $(x_1 < 0 < x_2) \Leftrightarrow P = x_1.x_2 < 0$

Đáp số : $-3 < m < 1$ (câu c)

Cần nhớ :

Phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \ne 0)$ *có hai nghiệm trái dấu* $(x_1 < 0 < x_2) \Leftrightarrow P = x_1.x_2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} < 0$ *(lúc đó hiển nhiên* $\Delta > 0$*)*

Bài 269. Giải phương trình : $\sqrt{10 + 8x - 2x^2} + x^2 - 10 = 3x - \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

★ *Hướng dẫn*

- Điều kiện để phương trình xác định $\begin{cases} \text{..........} \ge 0 \\ \text{..........} \ge 0 \end{cases}$ từ đây ta sẽ có x = ..., x = ...
- Kiểm tra x = ... nghiệm đúng phương trình.

Đáp số : x = 5.

Bài 270. Tùy theo m, giải và biện luận phương trình :

$$\sqrt{x^2 - x} = a - x \text{ (a là tham số)}$$

★ *Hướng dẫn*

Phương trình $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

GIẢI

Ta có : $\sqrt{x^2 - x} = a - x \Leftrightarrow \begin{cases} a - x \ge 0 \\ x^2 - x = a^2 - 2ax + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - x \ge 0 \\ (2a - 1)x = a^2 \quad (*) \end{cases}$

- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm $\Rightarrow$ Phương trình đã cho vô nghiệm
- $a \ne \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm $x = \dfrac{a^2}{2a - 1}$

Xét dấu $a - x = a - \dfrac{a^2}{2a - 1} = \dfrac{a^2 - a}{2a - 1}$

a	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
a − x		−	0	+	‖	−	0	+	
a và x		a < x	a = x	a > x	‖	a < x	a = x	a > x	

Kết quả

- $a < 0$ hay $\dfrac{1}{2} < a < 1$: Phương trình đã cho vô nghiệm.
- $0 \le a < \dfrac{1}{2}$ hay $a \ge 1$: Phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{a^2}{2a - 1}$

C. KIỂM TRA CÁC KIẾN THỨC VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 271. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Nếu $\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 40 \end{cases}$ thì x và y là nghiệm phương trình bậc hai nào sau đây ?

a) $t^2 - 8t + 40 = 0$ **c) $t^2 - 8t + 12 = 0$**

b) $t^2 - 8t + 20 = 0$ **d) $t^2 - 8t + 18 = 0$**

✶ ***Hướng dẫn***

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, từ đây ta tính được xy = ... rồi dùng phương trình $t^2 - St + P = 0$

Đáp số : $t^2 - 8t + 12 = 0$ (Câu c)

Bài 272. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tìm điều kiện của m để tồn tại hai số a và b thỏa mãn $\begin{cases} a.b = 2m^2 - 2m - 3 \\ a + b = 2m \end{cases}$

a) $m \in [-1 ; 3]$ **c) $m \in (-\infty ; -3] \cup [1 ; +\infty)$**

b) $m \in [-3 ; 1]$ **d) $m \in (-\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty)$**

✶ ***Hướng dẫn***

- a và b là nghiệm phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ hay
  $x^2 - 2mx + (2m^2 - 2m - 3) = 0$
  Ta phải có $\Delta' \geq 0$

Đáp số : $-1 \leq m \leq 3$ (Câu a)

Bài 273. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tính x và y biết $\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{3}{4} \\ x < 0 \end{cases}$

a) $x = -5$ và $y = 8$ **c) $x = -3$ và $y = 6$**

b) $x = -4$ và $y = 7$ **d) $x = -1$ và $y = 4$**

✶ ***Hướng dẫn***

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{3}{xy} = -\dfrac{3}{4}$, từ đây ta tính được xy ⇒ x và y là nghiệm phương trình $t^2 - 3t - 4 = 0$.

Đáp số : $x = -1$ và $y = 4$ (câu d)

Bài 274. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = m - 3 \\ x - y = -4m \end{cases}$, câu nào sau đây đúng ?

a) Hệ phương trình luôn có nghiệm.

b) Khi m = 0 thì hệ phương trình vô nghiệm.

c) Khi m = – 1 thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

d) Ba câu a, b, c đều sai.

✶ ***Hướng dẫn***

Lập định thức $D = -m - 1$

Khi $m = -1$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} -x + y = -4 \\ x - y = 4 \end{cases}$ có vô số nghiệm (x ; y)

Đáp số : Câu c

Bài 275. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax + y = -1 \end{cases}$. Câu nào sau đây sai ?

a) Hệ phương trình luôn có nghiệm.

b) Với a = 2 thì x = 0 và y = – 1 là một nghiệm của hệ phương trình.

c) a = 0 thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

d) x = 1 và y = 0 không phải là nghiệm của hệ.

✶ ***Hướng dẫn***

Lập định thức $D = 1 + a^2 \neq 0, \forall a \in R$ ⇒ Hệ phương trình không thể có vô số nghiệm

Đáp số : Câu c

Bài 276. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tính m để (x ; y) = (1 ; 2) là một nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x - y = m^2 + 1 \\ 2x - y = m^2 + m \end{cases}$

a) m = 0 **b) m = – 1** **c) m = 1** **d) m = ± 1**

✶ ***Hướng dẫn***

(x; y) = (1; 2) là nghiệm của hệ nên :

$$\begin{cases} 4 - 2 = m^2 + 1 \\ 2 - 2 = m^2 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 + m = 0 \end{cases}$$

Đáp số : m = – 1 (câu b)

Bài 277. (Câu hỏi trắc nghiệm)

- **Cho hệ phương trình** $\begin{cases} ax - by - a = 0 \\ bx - ay - b = 0 \end{cases}$

Tính các định thức D, D_x, D_y của hệ ?

a) $D = a^2 - b^2$, $D_x = b^2 - a^2$, $D_y = 2ab$

b) $D = -(a^2 + b)^2$, $D_x = a^2 - b^2$, $D_y = -2ab$

c) $D = a^2 + b^2$, $D_x = a^2 - b^2$, $D_y = 2ab$

d) $D = -(a^2 - b)^2$, $D_x = -(a^2 - b^2)$, $D_y = 0$

★ ***Hướng dẫn***

Viết các hệ số

$$\begin{tikzcd} a & -b & -a & a \\ b \arrow[r, bend right, "D"'] & -a \arrow[r, bend right, "D_x"'] & -b \arrow[r, bend right, "D_y"'] & b \end{tikzcd}$$

Đáp số : $D = -a^2 + b^2$, $D_x = b^2 - a^2$, $D_y = 0$ (câu d)

Bài 278. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + 9y - a = 0 \\ x + ay - 1 = 0 \end{cases}$**. Câu nào sau đây sai ?**

a) **$a = -3$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.**

b) **$a = 3$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.**

c) **$x = 2$ và $y = 0$ luôn là nghiệm của hệ.**

d) **Hệ phương trình luôn có nghiệm**

★ ***Hướng dẫn***

Lập các định thức

$$\begin{tikzcd} a & 9 & -a & a \\ 1 \arrow[r, bend right, "D"'] & a \arrow[r, bend right, "D_x"'] & -1 \arrow[r, bend right, "D_y"'] & 1 \end{tikzcd}$$

Ta có $D = a^2 - 9$, $D_x = a^2 - 9$, $D_y = 0$

Đáp số : Chỉ có câu c sai.

Bài 279. (Toán tự luận)

Biết đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một parabol (P) đi qua ba điểm A(r ; 0), B(p ; 0) và C(0, q), trong đó $r.p.q \neq 0$ và $r \neq p$

Tính a, b, c theo r, p, q.

★ ***Hướng dẫn***

- Điểm $(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = a x_0^2 + bx_0 + c$.
- Thay tọa độ A, B, C vào $y = ax^2 + bx + c$ rồi lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là a và b.

GIẢI

A(r; 0), B(p; 0), C(0; q) ∈ (P) : $y = ax^2 + bx + c$ nên :

$$\begin{cases} 0 = ar^2 + br + c \\ 0 = ap^2 + bp + c \\ q = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = q \\ ar^2 + br + c = 0 \quad (1) \\ ap^2 + bp + c = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Hệ (1) + (2) có các định thức D, D_a, B_b :

$$\begin{tikzcd} r^2 & r & q & r^2 \\ p^2 \arrow[r, bend right, "D"'] & p \arrow[r, bend right, "D_a"'] & q \arrow[r, bend right, "D_b"'] & p^2 \end{tikzcd}$$

- $D = r^2p - rp^2 = rp(r - p) \neq 0$ (vì $r.q \neq 0$ và $r \neq p$)
- $D_a = rq - pq = q(r - p)$
- $D_b = p^2q - qr^2 = q(p^2 - r^2) = -q(r - p)(r + p)$

Vậy $a = \dfrac{D_a}{D} = \dfrac{q}{rp}$, $b = \dfrac{D_b}{D} = \dfrac{-q(r+p)}{rp}$

Đáp số : (P) : $y = \dfrac{q}{rp}x^2 - \dfrac{q(r+p)}{rp}x + q$

Bài 280. (Toán tự luận)

Biết hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + bx + c = 0$ ($b \neq 0$) có một nghiệm chung. Chứng minh $(b - c)^2 + b(a - b)^2 = a(a - b)(b - c)$

★ ***Hướng dẫn***

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, ta có :

$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + b = 0 \\ x_0^2 + bx_0 + c = 0 \end{cases}$, từ đây tính x_0 rồi thay x_0 vào một trong hai phương trình ta có kết quả.

GIẢI

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, ta có :

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + b = 0 \quad (1) \\ x_0^2 + bx_0 + c = 0 \quad (2) \end{cases}$$

– Từ (1) và (2) ta được $(a - b)x_0 + (b - c) = 0$ (*)

– Vì hai phương trình có nghiệm chung là x_0 nên $a - b \neq 0$, do đó

$$x_0 = \frac{-(b-c)}{a-b}$$

– Thay $x_0 = \dfrac{-(b-c)}{a-b}$ vào (1) ta được : $\left(\dfrac{b-c}{a-b}\right)^2 - \dfrac{a(b-c)}{a-b} + b = 0$

$\Leftrightarrow (b-c)^2 - a(a-b)(b-c) + b(a-b)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (b-c)^2 + b(a-b)^2 = a(b-c)(a-b)$ (đpcm)

D. KIỂM TRA KIẾN THỨC VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 281. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Giả sử phương trình bậc hai $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 1$ $(b \neq 0)$. Tìm một hệ thức giữa a và b ?

a) $a = b$ b) $a + b = 0$ c) $2a = b$ d) $2a + b = 0$

★ *Hướng dẫn*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} = -\frac{a}{b}$$

Đáp số : $a + b = 0$ (câu b)

Bài 282. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 = 0$ (1) (m là ẩn số, x là tham số). Với những giá trị nào của x thì phương trình (1) có hai nghiệm m_1 và m_2 phân biệt ?

a) $x > -\dfrac{1}{2}$ b) $x > \dfrac{1}{2}$ c) $x < -\dfrac{1}{2}$ d) $x < \dfrac{1}{2}$

★ *Hướng dẫn*

Viết lại phương trình (1) : $m^2 - 2xm + x^2 - 2x + 1 = 0$

Tính Δ' và cho Δ' > 0

Đáp số : $x > \dfrac{1}{2}$ (câu b)

Bài 283. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Với những giá trị nào của m thì phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt và dương ?

a) $m \in (4; +\infty)$ b) $m \in (0; +\infty)$ c) $m \in (0; 4)$ d) $m \in (-\infty; 4)$

★ *Hướng dẫn*

Theo đề bài ta có $\begin{cases} \Delta' = 4 - m > 0 \\ P = m > 0 \\ S = 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$

Đáp số : $0 < m < 4$ (câu c)

Bài 284. (Câu hỏi trắc nghiệm)

α và β là hai nghiệm của phương trình $x^2 + x - 4 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = \alpha^3 + \beta^3$?

a) $T = -13$ b) $T = 13$ c) $T = -9$ d) $T = 9$

★ *Hướng dẫn*

$T = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha.\beta) = (\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta]$

Đáp số : $T = -13$ (Câu a)

Bài 285. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Xác định m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < 1$.

a) $m \in (-1; 3)$ b) $m \in (-1; -1)$ c) $m \in (-3; 3)$ d) $m \in (-3; 1)$

★ *Hướng dẫn*

Đặt $f(x) = x^2 + 2x + m$

Theo giả thiết ta có : $\begin{cases} 1.f(-1) < 0 \\ 1.f(1) > 0 \end{cases}$

Đáp số : $-3 < m < 1$ (câu d)

Bài 286. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Phương trình nào sau đây có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 < x_2 < -1$?

a) $2x^2 - 5x + 6 = 0$ c) $x^2 + 6x + 5 = 0$

b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ d) $x^2 + 6x + 7 = 0$

★ *Hướng dẫn*

Phương trình (a) vô nghiệm

Phương trình (b) và (c) có nghiệm x = – 1

Phương trình (d) có $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1.f(-1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} = -3 < -1 \end{cases}$ **Đáp số :** câu d

Bài 287. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Phương trình nào sau đây có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn bất đẳng thức $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

a) $3x^2 - 5x + 1 = 0$ **c)** $3x^2 - 2x - 4 = 0$

b) $3x^2 - x + 4 = 0$ **d)** $3x^2 - 5x - 4 = 0$

★ ***Hướng dẫn***

Đặt f(x) = vế trái phương trình bậc hai

Ta phải có : $\begin{cases} 3.f(0) < 0 \\ 3.f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(2) > 2 \end{cases}$

Đáp số : $3x^2 - 2x - 4 = 0$ (Câu c)

Bài 288. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Với những giá trị nào của a thì phương trình $3x^2 - ax + a = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $-2 < x_1 < 2 < x_2$ hoặc $x_1 < -2 < x_2 < 2$?

a) $a < -12$ V $a > 4$ **b)** $a < -4$ V $a > 12$

c) $-4 < a < 12$ **d)** $-12 < a < 4$

★ ***Hướng dẫn***

Đặt $f(x) = 3x^2 - ax + a$

Ta phải có $f(-2).f(2) < 0$

Đáp số : $a < -4$ V $a > 12$ (câu b)

Bài 289. (Toán tự luận)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2x + 2$

b) Cho phương trình $(x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x - 1)^2 + 2m = 0$ (*). Xác định m để phương trình (*) có nghiệm.

★ ***Hướng dẫn***

a) Biến đổi y (..........)^2 + hằng số $A \geq A$

b) Đặt t = ... rồi biến đổi phương trình (*) thành phương trình bậc hai ẩn số t (điều kiện của t : câu a)

Phương trình đã cho có nghiệm ⇔ Phương trình (theo t) có nghiệm t ≥ ....

GIẢI

a) Ta có $y = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1, \forall x \in R$

Dấu = xảy ra ⇔ x = 1

Đáp số : $\min\limits_{R}(y) = 1$ **khi x = 1**

b) Biến đổi phương trình (1).

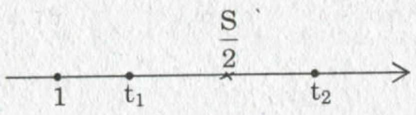
Phương trình (1) ⇔ $(x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + (2m + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 - 2x + 2 \quad (\text{điều kiện}: t \geq 1) \\ t^2 - 4t + 2(m + 2) = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $f(t) = t^2 - 4t + 2(m + 2)$

Phương trình đã cho có nghiệm x ⇔ Phương trình (*) có nghiệm t ≥ 1

- **Trường hợp 1 :** Phương trình (*) có hai nghiệm t_1, $t_2 \geq 1$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ 1.f(1) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 2(m + 2) = -2m \geq 0 \\ 1.f(1) = 2m + 1 \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} = 2 > 1 \quad (\text{hiển nhiên}) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 0$$

- **Trường hợp 2 :** Phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 sao cho :

  $t_1 \leq 1 \leq t_2 \Leftrightarrow 1.f(1) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{1}{2}$

  Hợp hai kết quả $-\dfrac{1}{2} \leq m \leq 0$ V $m \leq -\dfrac{1}{2}$ ta có $m \leq 0$

Đáp số : $m \leq 0$

Bài 290. (Toán tự luận)

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 - 4x^2 + 5$

b) Xác định a để phương trình $(-x^4 - 4x^2 + 5)^2 - 2(x^4 + 4x^2) + m = 0$ có nghiệm.

★ ***Hướng dẫn***

a) Biến đổi y = hằng số (..............) và lưu ý x^4, $x^2 \geq 0$

b) Đặt $t = -x^4 - 4x^2 + 5$ rồi biến đổi phương trình đã cho thành phương trình bậc hai ẩn số t (điều kiện t ≤ ....).

Sau đó giải giống bài 289.

Đáp số :

b) $\max\limits_{R}(y) = 5$ vì $y = 5 - (x^4 + 4x^2) \leq 5$ (Dấu = xảy ra ⇔ x = 0)

c) Phương trình đã cho ⇔ $\begin{cases} t = -x^4 - 4x^2 + 5 \quad (t \leq 5) \\ t^2 + 2t + m - 10 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Tiếp tục giống bài 289, ta có : $-25 \leq m \leq 11$ V $m \leq -25 \Leftrightarrow m \leq 11$

E. KIỂM TRA CÁC KIẾN THỨC VỀ TAM THỨC BẬC HAI

Bài 291. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tam thức bậc hai $f(x) = (m^2 - 3)x^2 + 2mx$ có bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Hãy tính m ?

a) $m = 1$ b) $m = -1$ c) $m = 3$ d) $m = -3$

★ Hướng dẫn

Từ bảng xét dấu ta có $\begin{cases} f(1) = 0 \\ m^2 - 3 > 0 \end{cases}$

Đáp số : $m = -3$ (câu d)

Bài 292. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Xác định các giá trị của m để bất phương trình $x^2 - 4x + 2m - 1 < 0$ có tập nghiệm $S = \varnothing$?

a) $m \le \frac{5}{2}$ b) $m \ge \frac{5}{2}$ c) $m < \frac{5}{2}$ d) $m > \frac{5}{2}$

★ Hướng dẫn

Bất phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2m - 1 \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in R \Leftrightarrow \Delta' \le 0$

Đáp số : $m \ge \frac{5}{2}$ (câu b)

Bài 293. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x - 1}{(x + 1)(-x^2 + 4x - 6)} \ge 0$ là :

a) $S = (-1 ; \frac{1}{2})$ b) $S = [-1 ; \frac{1}{2}]$ c) $[-1 ; \frac{1}{2})$ d) $(-1 ; \frac{1}{2}]$

★ Hướng dẫn

Vì $(-x^2 + 4x - 6) < 0$, $\forall x \in R$ nên bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{2x - 1}{x + 1} \le 0 \Leftrightarrow -1 < x \le \frac{1}{2}$

Đáp số : $S = (-1; \frac{1}{2}]$ (câu d)

Bài 294. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Giả sử tam thức bậc hai $f(x) = (1 - m)x^2 + 2mx + 4$ có bảng xét dấu :

(x_1, x_2 là hai nghiệm của f(x))

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	

Câu nào sau đây đúng ?

a) $m > 1$ b) $m < 1$ c) $|m| > 1$ d) $|m| < 1$

★ Hướng dẫn $f(x) > 0$ khi $x \in (x_1; x_2)$ nên $a = 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$

Đáp số : $m > 1$ (câu a)

Bài 295. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tam thức $f(x) = 2x^2 - ax - 3$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$. Tính a ?

a) $a = 15$ b) $|a| = 15$ c) $a = -15$ d) Một giá trị khác.

★ Hướng dẫn

- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2} = \frac{S}{P}$

Đáp số : $a = -15$ (câu c)

Bài 296. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tam thức $f(x) = x^2 - 2mx + 4$ có giá trị nhỏ nhất bằng 3. Tính m ?

a) $m = 1$ b) $m = -1$ c) $|m| = 1$ d) $|m| > 1$

★ Hướng dẫn

- $f(x) = (x - m)^2 + 4 - m^2 \ge 4 - m^2$

  Vậy $\min_{R}[f(x)] = 4 - m^2 = 3$

Đáp số : $|m| = 1$ (câu c)

Bài 297. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Hàm số $y = \sqrt{2x^2 - mx + 2}$ có tập xác định $S = R$ khi :

a) $|m| \le 4$ b) $|m| < 4$ c) $|m| \le 16$ d) $|m| < 16$

★ Hướng dẫn

Hàm số đã cho xác định trên R $\Leftrightarrow 2x^2$ .... $\ge 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \Delta \le 0$

Đáp số : $|m| \le 4$ (Câu a)

Bài 298. **(Câu hỏi trắc nghiệm)**

Cho tam thức $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Tập nghiệm của phương trình $f(x + 1) = 0$ là :

a) $S = \{1; 3\}$ b) $S = \{-1; -3\}$ c) $S = \{0; -2\}$ d) $S = \{2; 0\}$

★ ***Hướng dẫn***

- $g(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2 - 4(x + 1) + 3$

Đáp số : $S = \{2, 0\}$ (câu d)

Bài 299. **Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.**

Chứng minh rằng tam thức $f(x) = (b + c)x^2 - 2(a + b + c)x + 2(a + b + c)$ luôn có giá trị dương.

★ ***Hướng dẫn***

- Tính Δ' của f(x) và chú ý rằng $a, b, c > 0$ và $a + b > c$, $b + c > a$, ...

GIẢI

- $f(x) = (b + c)x^2 - 2(a + b + c)x + 2(a + b + c)$

$$\begin{aligned}\Delta' &= (a + b + c)^2 - 2(b + c)(a + b + c)\\ &= (a + b + c)[(a + b + c) - 2(b + c)]\\ &= (a + b + c)(a - b - c)\end{aligned}$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a, b, c > 0$ và $a < b + c$

$\Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in R$

Bài 300. **Tùy theo m, tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 4x - m + 2}$ (1)**

★ ***Hướng dẫn***

- Hàm số (1) xác định $\Leftrightarrow x^2 + ... \geq 0$
- Đặt $f(x) = x^2 + 4x - m + 2$, tính và xét dấu Δ'.

GIẢI

- Hàm số (1) xác định $\Leftrightarrow x^2 + 4x - m + 2 \geq 0$ (Gọi D là tập xác định của hàm số)
- Đặt $f(x) = x^2 + 4x - m + 2$, ta có : $\Delta' = 4 - (-m + 2) = m + 2$

m	$-\infty$		-2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

m	Δ'	Xét dấu f(x)	D hàm số
$-\infty$	$-$	$f(x) > 0, \forall x \in R$	$D = R$
-2	0	$f(x) \geq 0, \forall x \in R$	$D = R$
$+\infty$	$+$	x: $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ f(x): $+$ 0 $-$ 0 $+$	$(-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty)$

x_1, x_2 là hai nghiệm của f(x) $\begin{cases} x_1 = -2 - \sqrt{m + 2} \\ x_2 = -2 + \sqrt{m + 2} \end{cases}$ $(x_1 \leq x_2)$

Chuyên đề 1 VECTƠ

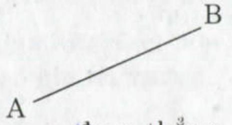
Kiến thức cơ bản

I) Các định nghĩa

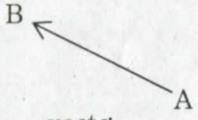
1) Vectơ

Định nghĩa

Vectơ là đoạn thẳng đã định hướng, nghĩa là đã chọn một điểm mút làm điểm đầu, điểm mút còn lại là điểm cuối.



đoạn thẳng



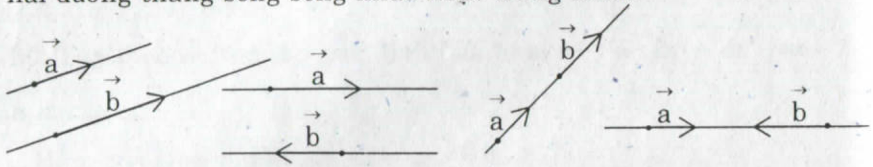
vectơ

- Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B, kí hiệu : $\overrightarrow{AB}$
- Với hai điểm phân biệt A và B, ta có hai vectơ khác nhau : $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$
- Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, chẳng hạn: $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{MM}$, ... gọi là "**vectơ - không**", kí hiệu $\vec{\mathbf{0}}$

2) Phương, hướng, độ dài của vectơ

a) Định nghĩa

Hai vectơ gọi là cùng phương khi hai vectơ này lần lượt nằm trên hai đường thẳng song song nhau hoặc trùng nhau.

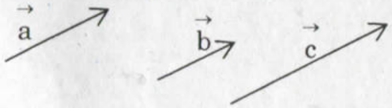


Hệ quả : Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì hai vectơ đó cùng phương.

b) Hai vectơ $\vec a$ và $\vec b$ cùng phương thì $\vec a$ và $\vec b$ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng

Chú ý :

- $\vec 0$ cùng hướng với mọi vectơ.
- Hai vectơ cùng hướng với một vectơ thứ ba thì hai vectơ đó cùng hướng.



c) Định nghĩa

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là độ dài của đoạn thẳng AB, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$

* $\vec 0$ có độ dài bằng 0 ($\vec 0 = 0$)

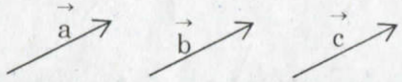
3) Hai vectơ bằng nhau

Định nghĩa

Hai vectơ bằng nhau khi chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau.

Chú ý :

- $\vec a$ và $\vec b$ bằng nhau, kí hiệu $\vec a = \vec b$
- $[\vec a = \vec b$ và $\vec b = \vec c] \Rightarrow \vec a = \vec c$



- Cho sẵn $\vec a$ và một điểm O, ta có duy nhất một điểm A : $\overrightarrow{OA} = \vec a$
- Mọi vectơ $\vec 0$ đều bằng nhau

II) Phép cộng các vectơ

1) Định nghĩa tổng các vectơ

Cho hai vectơ $\vec a$ và $\vec b$.

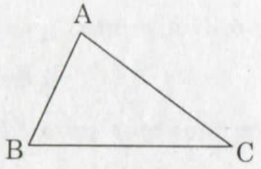
Từ điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec a$ và $\overrightarrow{BC} = \vec b$.

Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng hai vectơ $\vec a$ và $\vec b$, kí hiệu : $\overrightarrow{AC} = \vec a + \vec b$

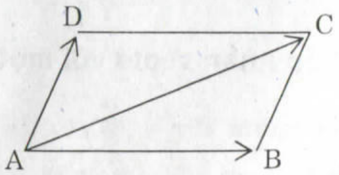
Chú ý :

- Tổng $\vec a + \vec b$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A.
- Quy tắc ba điểm : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (ba điểm A, B, C tùy ý) (hình 1)
- Quy tắc đường chéo hình bình hành.

ABCD là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (hình 2)



(Hình 1)



(Hình 2)

2) Tính chất

a) Với mọi $\vec{a}$ ta có : $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

b) Với mọi $\vec{a}$, $\vec{b}$, ta có : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (giao hoán)

c) Với mọi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ta có : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (kết hợp)

III) Phép trừ hai vectơ

1) Vectơ đối của một vectơ

a) Định lí

Với mỗi $\vec{a}$ cho trước, luôn có một vectơ $\vec{x}$ duy nhất sao cho $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$

b) Định nghĩa

Nếu vectơ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ thì vectơ $\vec{b}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ và kí hiệu là $-\vec{a}$

Chú ý :

- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- Mỗi vectơ có một vectơ đối duy nhất.
- Nếu $\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a}$ thì $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$ nên:

  $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau.

2) Hiệu của hai vectơ

Định nghĩa

Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$, là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$ nghĩa là : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Chú ý :

- Phép tìm hiệu $\vec{a} - \vec{b}$ gọi là phép trừ hai vectơ.
- Cho ba điểm bất kì : A, B, C, ta có : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

IV) Phép nhân vectơ với một số

1) Định nghĩa

Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu $k.\vec{a}$, được xác định như sau :

a) $k.\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k \le 0$

b) $k.\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$

c) Độ dài của $k.\vec{a}$ là $|k.\vec{a}| = |k|.|\vec{a}|$

2) Tính chất

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l, ta có :

a) $k(l.\vec{a}) = (k.l).\vec{a}$

b) $(k + l).\vec{a} = k.\vec{a} + l.\vec{a}$

c) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k.\vec{a} + k.\vec{b}$

d) $1.\vec{a} = \vec{a}$; $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$

3) Định lí

Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương và $\vec{a} \ne \vec{0}$ thì tồn tại duy nhất số thực k sao cho $\vec{b} = k.\vec{a}$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet\ k > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \\ \bullet\ k < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ ngược hướng} \end{array}\right.$$

4) Điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số cho trước

a) Định nghĩa

Cho hai điểm phân biệt A và B

Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$ $(k \ne 1)$

b) Định lí

Cho điểm O tùy ý và $k \ne 1$, ta có :

M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{OA} - k.\overrightarrow{OB}\right)$

c) Hệ quả

Khi $k = -1$ thì M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Vậy : M là trung điểm của đoạn thẳng AB

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ (O là điểm tuỳ ý)

5) Trọng tâm của tam giác

Định lí

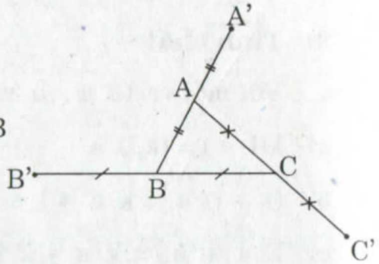
- G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

Toán

Bài 1. Cho tam giác ABC, gọi A' là điểm đối xứng với B qua A, B' là điểm đối xứng với C qua B, C' là điểm đối xứng với A qua C.

Chứng minh rằng với một điểm O bất kì ta có :

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'}$$



★ ***Hướng dẫn***

- $\vec{OA} = \vec{OA'} + \vec{A'A}$ và chú ý $\vec{A'A} = \vec{AB}$
- Tương tự đối với $\vec{OB}$ và $\vec{OC}$
- $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} =$ ....

GIẢI

Ta có : $\vec{OA} = \vec{OA'} + \vec{A'A} = \vec{OA'} + \vec{AB}$ (1) (vì $\vec{A'A} = \vec{AB}$)

Tương tự $\vec{OB} = \vec{OB'} + \vec{B'B} = \vec{OB'} + \vec{BC}$ (2)

$\vec{OC} = \vec{OC'} + \vec{C'C} = \vec{OC'} + \vec{CA}$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) ta có :

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \underbrace{\boxed{\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}}}_{\vec{0}}$$

$$= \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} \text{ (đpcm)}$$

Bài 2. Cho lục giác ABCDEF. Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Chứng minh rằng hai tam giác PRT và QSU có cùng trọng tâm.

★ ***Hướng dẫn***

Gọi G và K lần lượt là trọng tâm ΔPRT và ΔQSU, ta chứng minh

$\vec{GK} = \vec{0}$ bằng cách chú ý $\begin{cases} \vec{GP} + \vec{GR} + \vec{GT} = \vec{0} \\ \vec{KQ} + \vec{KS} + \vec{KU} = \vec{0} \end{cases}$

GIẢI

- G là trọng tâm tam giác PRT nên $\vec{GP} + \vec{GR} + \vec{GT} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{GK} + \vec{KP} + \vec{GK} + \vec{KR} + \vec{GK} + \vec{KT} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{GK} + (\vec{KP} + \vec{KR} + \vec{KT}) = \vec{0}$ (1)

- K là trọng tâm tam giác QSU nên $\vec{KQ} + \vec{KS} + \vec{KU} = \vec{0}$

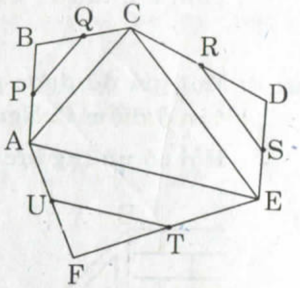
$\Leftrightarrow \vec{QK} + \vec{SK} + \vec{UK} = \vec{0}$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có :

$3\vec{GK} + (\vec{QK} + \vec{KP}) + (\vec{SK} + \vec{KR}) + (\vec{UK} + \vec{KT}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\vec{GK} + (\vec{QP} + \vec{SR} + \vec{UT}) = \vec{0}$ (3)

Ta lại có : $\begin{cases} \vec{QP} = \frac{1}{2}\vec{CA} \\ \vec{UT} = \frac{1}{2}\vec{AE} \\ \vec{SR} = \frac{1}{2}\vec{EC} \end{cases}$



$\Rightarrow \vec{QP} + \vec{UT} + \vec{SR} = \frac{1}{2}\left(\vec{CA} + \vec{AE} + \vec{EC}\right) = \vec{0}$ (4)

(3) và (4) $\Rightarrow 3\vec{GK} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GK} = \vec{0} \Leftrightarrow G \equiv K$ (đpcm)

Bài 3. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD. Chứng minh 2$\vec{MN} = \vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$

GIẢI

Chứng minh

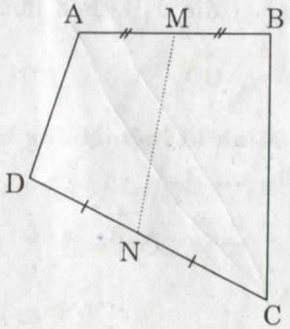
- $\vec{MN} = \vec{AC} + \vec{BD}$

Ta có : ♦ $\vec{AC} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NC}$

♦ $\vec{BD} = \vec{BM} + \vec{MN} + \vec{ND}$

Cộng vế, ta được: $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AM} + 2\vec{MN} + \vec{NC} + \vec{BM} + \vec{ND}$

$= \vec{AM} + \vec{BM} + 2\vec{MN} + \vec{NC} + \vec{ND}$ (1)



Mà M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

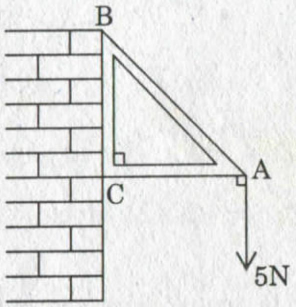
Do đó, (1) trở thành : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$ (đpcm)

- Tương tự ta có : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$

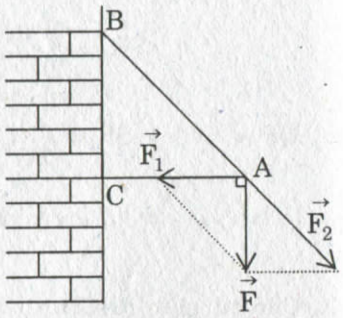
Tóm lại, ta có : $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Bài 4. Một giá đỡ được gắn vào tường như hình 1a. Tam giác ABC vuông cân ở điểm C. Người ta treo vào điểm A một vật nặng 5N.

Hỏi có những lực nào tác động vào bức tường tại hai điểm B và C ?



Hình 1a



Hình 1b

GIẢI

Tại điểm A, lực kéo $\vec{F}$ hướng thẳng đứng xuống dưới có cường độ 5N, ta có thể xem $\vec{F}$ là tổng của hai vectơ $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ lần lượt nằm trên hai đường thẳng AC và AB.

Dễ thấy : $|\vec{F_1}| = |\vec{F}|$ và $|\vec{F_2}| = |\vec{F}|\sqrt{2}$ (do tam giác ABC vuông cân tại C)

Vậy : Có một lực ép vuông góc với bức tường tại điểm C với cường độ 5N, và một lực kéo bức tường tại điểm B theo hướng $\overrightarrow{BA}$ với cường độ $5\sqrt{2}$ N (Xem hình 1b)

Bài 5. Cho n điểm trên mặt phẳng. Bạn Minh kí hiệu chúng là $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$. Bạn Mai kí hiệu chúng là $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots\ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}$

GIẢI

- Lấy điểm O tùy ý, ta có :

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots\ldots + \overrightarrow{A_nB_n}$$
$$= (\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2}) + \ldots\ldots + (\overrightarrow{OB_n} - \overrightarrow{OA_n})$$
$$= (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \ldots\ldots + \overrightarrow{OB_n}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots\ldots + \overrightarrow{OA_n}) \quad (1)$$

- Vì n điểm $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$ cũng là n điểm $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ nhưng được kí hiệu một cách khác, cho nên ta có :

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \ldots\ldots + \overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots\ldots + \overrightarrow{OA_n}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots\ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}$ (đpcm)

Bài 6. Cho ba điểm phân biệt A, B, C.

a) Chứng minh rằng nếu có một điểm I nào đó và một số thực t sao cho $\overrightarrow{IA} = t.\overrightarrow{IB} + (1-t)\overrightarrow{IC}$ thì với mọi điểm I' ta đều có :

$$\overrightarrow{I'A} = t.\overrightarrow{I'B} + (1-t)\overrightarrow{I'C}$$

b) Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{IA} = t.\overrightarrow{IB} + (1-t)\overrightarrow{IC}$ là điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

GIẢI

a) Theo giả thiết : $\overrightarrow{IA} = t.\overrightarrow{IB} + (1-t)\overrightarrow{IC}$, thì với mọi điểm I' , ta có :

$$\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'A} = t.\left(\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'B}\right) + (1-t)\left(\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'C}\right)$$
$$= t.\overrightarrow{I'B} + (1-t)\overrightarrow{I'C} + \overrightarrow{II'} \Rightarrow \overrightarrow{I'A} = t\overrightarrow{I'B} + (1-t)\overrightarrow{I'C}$$

b) Nếu ta chọn I' trùng với A thì có $\vec{0} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$, đó là điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD.

a) Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

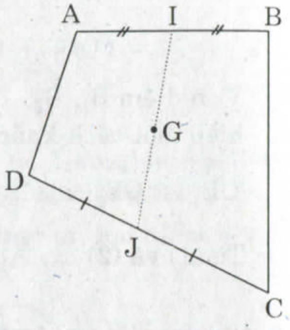
b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, vectơ $\overrightarrow{OG}$ là trung bình cộng của bốn vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$, tức là $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$ (Điểm G như thế gọi là trọng tâm của tứ giác ABCD).

★ ***Hướng dẫn***

Sử dụng công thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$ (O là trung điểm AB).

Tính $\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \text{..........} \quad (1) \\ \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \text{..........} \quad (2) \end{cases}$

Cộng (1) và (2) rồi sử dụng giả thiết.



GIẢI

a) **Vị trí của G**

Ta có :

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GI}$ (I là trung điểm AB)
- $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GJ}$ (J là trung điểm CD)

Cộng vế của (1) và (2), ta có :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}\right)$$

Mà $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$ (gt) nên $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{0}$

Vậy, G là trung điểm của IJ

b) **Chứng minh** $\overrightarrow{GO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right)$

Từ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$, ta có :

$$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$$

Bài 8. Cho điểm O cố định và đường thẳng d đi qua hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có số α sao cho $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OB}$

Với điều kiện nào của α thì M thuộc đoạn thẳng AB ?

GIẢI

Ta có :

- $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA} \quad \Leftrightarrow M \in d$

- Vì $\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA}$ nên M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $0 \le \alpha \le 1$

Bài 9. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), H là trực tâm tam giác và D là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng :

c) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD}$

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

e) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

f) **Đường thẳng HO đi qua trọng tâm G của tam giác ABC (đường thẳng đó gọi là đường thẳng Ơ – le của tam giác ABC)**

GIẢI

a) Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O, ta có B'C ⊥ BC.

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên AH ⊥ BC. Vậy AH // B'C (i)

Chứng minh tương tự ta cũng có CH // B'A (j)

(i) và (j) ⇒ AB'CH là hình bình hành ⇒ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

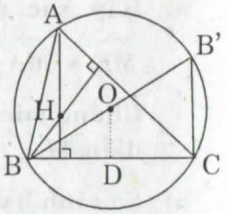
OD là đường trung bình của tam giác BB'C nên $\overrightarrow{B'C} = 2\overrightarrow{OD}$

Vậy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD}$ (đpcm)

b) Ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{AH}$

$= \overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ (đpcm)



c) G là trọng tâm tam giác ABC, ta có :

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG} = 3(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OG}) = 3\overrightarrow{HO} + 3\overrightarrow{OG}$

$= 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Kết hợp với kết quả của câu b ta có :

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{HO} - \overrightarrow{HO} = 2\overrightarrow{HO}$ (đpcm)

d) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên từ kết quả câu b ta có : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$, do đó ba điểm H, O, G thẳng hàng.

Bài 10. Cho tam giác ABC và điểm O tùy ý.

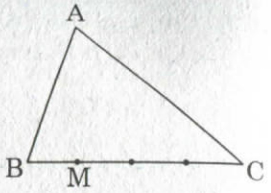
a) **Hãy xác định vị trí điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{4}\left(3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.**

b) **Với điểm M đã được xác định ở câu a, tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$**

★ ***Hướng dẫn***

a) Tính $\overrightarrow{BM}$ theo $\overrightarrow{BC}$ (căn cứ giả thiết)

b) Cho O ≡ A ta có kết quả.



GIẢI

a) Vị trí của M

Ta có : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}\right) = 3\overrightarrow{OB} + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{BM} = 4\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Vậy điểm M ở trên đoạn thẳng BC và BM = $\frac{1}{4}$BC (hình vẽ)

b) Chọn điểm O ≡ A ta được : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

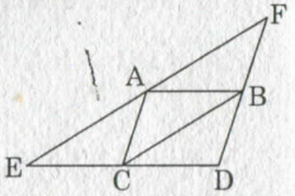
Bài 11. Cho tam giác ABC và điểm M tuỳ ý.

a) Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$.

Chứng minh rằng các điểm D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) So sánh hai tổng vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$

GIẢI



a) • **Xác định điểm D**

Ta có : $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

Vậy : D là đỉnh thứ tư của hình bình hành vẽ trên hai cạnh AB và AC (xem hình vẽ)

- **Xác định điểm E**

Tương tự, ta có : $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$

Vậy : E là đỉnh thứ tư của hình bình hành vẽ trên hai cạnh BA và BC. (xem hình vẽ)

- **Xác định điểm F**

Tương tự, ta có : $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$

Vậy F là đỉnh thứ tư của hình bình hành vẽ trên hai cạnh CA và CB. (xem hình vẽ)

Ta đã có : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$ nên D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của M

b) So sánh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$

$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CF})$

$= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF})$ (1)

- Ta lại có : $\begin{cases} \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} & \text{chứng minh trên} \\ \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB} & \text{vì CBFA là hình bình hành} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AF}$ ⇒ A là trung điểm EF.

- Tương tự : B là trung điểm DF và C là trung điểm DE nên :

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} \\ 2\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FE} \\ 2\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta được :

$2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$ (2)

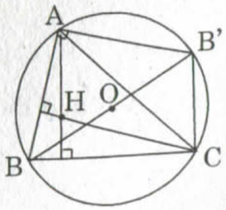
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ (đpcm)

Bài 12. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O).

Gọi H là trực tâm tam giác ABC và B' là điểm đối xứng với B qua tâm O.

Hãy so sánh các vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{HC}$.

★ ***Hướng dẫn***



- Ta có : $\begin{cases} CH \perp AB \\ AB' \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \mathbin{//} AB'$

- Tương tự AH // CB' (2)

Từ (1) và (2) ta có AHCB' là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ và $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$

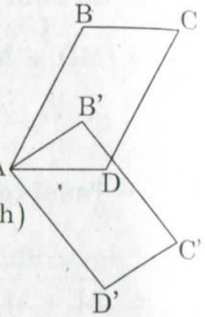
Bài 13. Cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' có chung đỉnh A.

Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$

b) Hai tam giác BC'D và B'CD' có cùng trọng tâm.

GIẢI



a) $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'}$

$= (\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'}) + (\overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AD})$

$= (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}) - \overrightarrow{AC'} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AC'} \text{ (Vì AB'C'D' là hình bình hành)} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \text{ (Vì ABCD là hình bình hành)} \end{cases}$

Nên $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ (đpcm)

b) Hai tam giác BC'D và B'CD' có cùng trọng tâm

Với điểm G bất kì ta có :

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'}) + (\overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{D'D})$

$= (\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'}) + (\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D})$

$= (\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'}) - (\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'})$

$= \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} - \vec{0} = \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'})$ (*)

Nếu G là trọng tâm tam giác BC'D thì $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, lúc đó từ (*) ta cũng có $\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$ ⇒ G cũng là trọng tâm tam giác B'CD' (đpcm)

Vậy trọng tâm hai tam giác BC'D và B'CD' trùng nhau.

Bài 14. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ **có độ dài nhỏ nhất.**

GIẢI

Với mọi điểm O ta có : $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

$= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM})$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OM}$

Ta chọn điểm O sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Khi đó $\vec{u} = -4\overrightarrow{OM}$ và do đó $|\vec{u}| = 4OM$.

Độ dài vectơ $\vec{u}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi 4OM nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của O trên d.

Chú ý : *Cách chọn điểm O sao cho* $\vec{v} = \vec{0}$

G là trọng tâm tam giác ABC, ta có :

$\vec{v} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$

Vậy để $\vec{v} = \vec{0}$ *ta chọn điểm O sao cho* $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GC}$

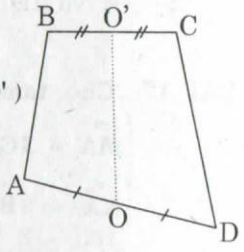
Bài 15. Cho tứ giác ABCD. Với số k tuỳ ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ **và** $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$.

Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN.

GIẢI

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có :

$\begin{cases} \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO'} \\ \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO'} \end{cases}$



$\Rightarrow 2\overrightarrow{OO'} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BO'} + \overrightarrow{CO'})$

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \text{ (vì O là trung điểm AD)} \\ \overrightarrow{BO'} + \overrightarrow{CO'} = \vec{0} \text{ (vì O' là trung điểm BC)} \end{cases}$

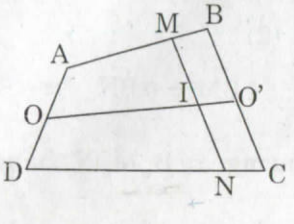
Nên $2\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$ (1)

Tương tự : O và I là trung điểm của AD và MN nên ta cũng có :

$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}\right) = \frac{1}{2}\left(k.\overrightarrow{AB} + k.\overrightarrow{DC}\right) = k.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ⇒ $\overrightarrow{OI} = k.\overrightarrow{OO'}$ ⇒ I ∈ đường thẳng (OO')

Vậy khi k thay đổi, tập hợp các điểm I là đường thẳng OO'.



Bài 16. Cho tam giác ABC, lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BD}$.

Gọi I là điểm xác định bởi $4\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Chứng minh A, I, D nằm trên một đường thẳng.

✶ ***Hướng dẫn***

Dựa vào các giả thiết, chứng minh $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{ID}$ cùng phương (chứng minh $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$)

GIẢI

- Ta có : $\overrightarrow{BC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB}\right) = 5\left(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB}\right)$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IB} = 5\overrightarrow{ID}$ (1)

- Theo giả thiết : $4\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có : $4\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{ID} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{ID}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{ID}$ cùng phương $\Rightarrow$ I, A, D thẳng hàng (đpcm)

Bài 17. Cho tam giác ABC, M và N là hai điểm được xác định bởi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{CM} \\ \overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CN} \end{cases}$$

Chứng minh ba điểm M, N, B thẳng hàng.

✶ ***Hướng dẫn***

- Từ $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = 3\left(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC}\right)$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ (1)

- Từ $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BN} + 3\left(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BC}\right)$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ (2)

- Từ (1) và (2) ta được : $4\overrightarrow{BM} = 6\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{BN}$ cùng phương $\Rightarrow$ B, M, N thẳng hàng (đpcm)

Bài 18. Cho tứ giác ABCD. P, Q, R lần lượt là trọng tâm các tam giác ADB, BCD và ACD, G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và PQR.

Chứng minh đường thẳng GG' đi qua D.

✶ ***Hướng dẫn***

- Áp dụng tính chất sau :

G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm tuỳ ý, ta có :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ để chứng minh $\overrightarrow{DG}$ và $\overrightarrow{DG'}$ cùng phương.

GIẢI

- Ta có : $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ (1) vì G là trọng tâm tam giác ABC
- Tương tự ta cũng có :

$3\overrightarrow{DG'} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DR}$ (2)

$3\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ (3)

$3\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ (4)

$3\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ (5)

Cộng (3), (4), (5) ta được :

$3\left(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DR}\right) = 2\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right)$ (6)

Từ (1), (2) và (6), ta có : $9\overrightarrow{DG'} = 6\overrightarrow{DG} \Leftrightarrow \overrightarrow{DG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DG}$

Vậy $\overrightarrow{DG'}$ và $\overrightarrow{DG}$ cùng phương $\Rightarrow$ D, G, G' thẳng hàng (đpcm)

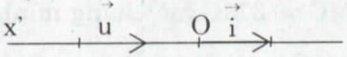
Chuyên đề 2 TRỤC – TỌA ĐỘ TRÊN TRỤC

Kiến thức cơ bản

1) Trục

Định nghĩa

Trục toạ độ (hay trục) là một đường thẳng trên đó đã chọn một điểm O làm gốc và một vectơ $\vec{u}$ có độ dài bằng 1 (đơn vị chiều dài) lẳm vectơ đơn vị.



2) Toạ độ của vectơ trên trục

Trên trục x'Ox, cho vectơ $\vec{u}$.

Đinh nghĩa

Vì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương nên $\vec{u} = a.\vec{i}$ $(a \in R)$

Số a trong đẳng thức $\vec{u} = a.\vec{i}$ được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ trên trục đã cho.

Chú ý :

- $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có tọa độ bằng nhau
- Tọa độ của vectơ $\vec{0}$ là 0.
- Tọa độ của $\vec{AB}$, kí hiệu : $\overline{AB}$ (đọc là : độ dài đại số của vectơ $\vec{AB}$)

  Ta có : $\vec{AB} = \overline{AB}.\vec{i}$
- Phân biệt : $\vec{AB}$ và $\overline{AB}$ $\begin{cases} \vec{AB} \text{ là một vectơ} \\ \overline{AB} \text{ là một số thực} \end{cases}$

Định lí

Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ trên cùng một trục lần lượt có tọa độ a, b.

Ta có :

a) $\vec{u} + \vec{v}$ có tọa độ = a + b

b) $\vec{u} - \vec{v}$ có tọa độ = a – b

c) $k\vec{u}$ có tọa độ = ka (k là một số thực)

3) Tọa độ của một điểm

Định nghĩa

Cho điểm M ở trên trục x'Ox, ta có : $\vec{OM} = m.\vec{i}$ $(m \in R)$

Toạ độ m của vectơ $\vec{OM}$ được gọi là tọa độ của M

$$\vec{OM} = m.\vec{i} \Leftrightarrow m \text{ là toạ độ của M}$$

Định lí

Nếu hai điểm A và B trên trục x'Ox lần lượt có tọa độ là a và b thì $\vec{AB}$ có tọa độ b – a

4) Hệ thức Salơ (Chales)

Định lí

Với ba điểm A, B, C trên trục x'Ox có thứ tự tuỳ ý, ta có :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Toán

Bài 19. Trên trục x'Ox, cho hai điểm A và B có tọa độ lần lượt bằng a và b

a) Tìm tọa độ x của điểm M sao cho $\vec{MA} = k\vec{MB}$, $k \neq 1$.

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

c) Tìm tọa độ của điểm M sao cho $2\vec{MA} = -5\vec{MB}$

★ *Hướng dẫn*

a) Tính tọa độ của $\vec{MA}$ và $\vec{MB}$

b) $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

c) Áp dụng kết quả câu a với $k = -\frac{5}{2}$

GIẢI

a) Tìm tọa độ x của M

Theo đề bài : $\vec{MA} = k\vec{MB}$ $(k \neq 1)$ (1)

Mà
- $\vec{MA} = (a - x)\vec{i}$
- $\vec{MB} = (b - x)\vec{i} \Rightarrow k\vec{MB} = k(b - x)\vec{i}$

Vậy từ (1) ta có : a –x = k(b – x)

$$\Leftrightarrow (1 - k)x = a - kb \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a - kb}{1 - k} \quad (k \neq 1)$$

b) Tọa độ trung điểm I của AB

I là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \vec{IA} = \vec{BI}$ với $\begin{cases} \vec{IA} = a - x_I \\ \vec{BI} = x_I - b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow a - x_I = x_I - b \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a + b}{2}$$

Cần nhớ : *Phân biệt hai công thức* $\begin{cases} \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} & (1) \\ \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} & (2) \end{cases}$

- *Công thức (1) đúng trong mọi trường hợp nghĩa là công thức (1) đúng khi A, B, C ở trên cùng một trục (thẳng hàng) hoặc A, B, C không thẳng hàng.*
- *Công thức (2) chỉ đúng khi A, B, C ở trên cùng một trục (thẳng hàng).*

c) Toạ độ của M

$2\overrightarrow{MA} = -5\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow 2(a - x_M) = -5(b - x_M)$

$\Leftrightarrow 7x_M = 2a + 5b \Leftrightarrow x_M = \dfrac{2a + 5b}{7}$

Cách khác :

$2\overrightarrow{MA} = -5\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\dfrac{5}{2}\overrightarrow{MB}$

Áp dụng kết quả câu a với $k = -\dfrac{5}{2}$, ta có :

$x_M = \dfrac{a + \frac{5}{2}b}{1 + \frac{5}{2}}$ hay $x_M = \dfrac{2a + 5b}{7}$

Bài 20. Trên trục x'Ox, cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là a, b, c. Tìm tọa độ của điểm I sao cho $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = 0$

★ *Hướng dẫn*

Gọi tọa độ của I là x, ta có :

* $\overline{IA} = a - x$, ...

GIẢI

Gọi tọa độ của I là x

Ta có : $\overline{IA} = a - x$, $\overline{IB} = b - x$, $\overline{IC} = c - x$

Do đó : $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = 0$

$\Leftrightarrow a - x + b - x + c - x = 0 \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{a + b + c}{3}$

Bài 21. Trên trục x'Ox cho bốn điểm A, B, C, D tuỳ ý. Chứng minh :

a) $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$

b) Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD, AB, CD. Chứng minh rằng IJ và KL có chung trung điểm.

★ *Hướng dẫn*

a) Gọi tọa độ của A, B, ... là a, b, ... Sau đó tính $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ...

Tính $\overline{AB}.\overline{CD}$ = ... (theo a, b, ...)

b) Tìm tọa độ của I, J, K, L rồi tìm tọa độ trung điểm của IJ và KL (xem lại câu b bài 19)

GIẢI

a) Chứng minh

Ta có : $\overline{AB}.\overline{CD} = (b - a)(d - c) = bd - bc - ad + ac$

$\overline{AC}.\overline{DB} = (c - a)(b - d) = bc - cd - ab + ad$

$\overline{AD}.\overline{BC} = (d - a)(c - b) = cd - bd - ac + ab$

Cộng vế theo vế ta được : $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$

b) Chứng minh

Gọi i, j, k, l lần lượt là tọa độ của I, J, K, L, ta có :

$$\begin{cases} i = \dfrac{a + c}{2} \\ j = \dfrac{b + d}{2} \end{cases} \Rightarrow i + j = \dfrac{a + b + c + d}{2}$$

Tương tự : $k + l = \dfrac{a + b + c + d}{2}$

Do đó : $i + j = k + l \quad \Leftrightarrow \dfrac{i + j}{2} = \dfrac{k + l}{2}$

Mà $\dfrac{i + j}{2}$ là tọa độ trung điểm của IJ

và $\dfrac{k + l}{2}$ là tọa độ trung điểm của KL

Vậy IJ và KL có chung trung điểm (đpcm).

Bài 22. Trên trục (O; $\vec{i}$), cho ba điểm A(– 4), B(– 5), C(3). Tìm điểm M trên trục đã cho sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Sau đó tính $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ và $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$.

GIẢI

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \quad \Leftrightarrow \overline{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right)$

$\Leftrightarrow \overline{OM} = \dfrac{1}{3}(-4 - 5 + 3) = -2$ Vậy M(– 2)

$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = -4 + 2 = -2$

Tương tự ta cũng có : $\overline{MB} = -3$, $\overline{MC} = 5$

Vậy $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\dfrac{3}{5}$

Bài 23. Cho a, b, c, d thứ tự là tọa độ của các điểm A, B, C, D trên trục x'Ox

a) Chứng minh rằng khi a + b ≠ c + d thì ta luôn tìm được điểm M sao cho $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$

Áp dụng : Tìm tọa độ của M, nếu có, biết A(– 2), B(5), C(3), D(– 1)

b) Khi AB và CD có cùng trung điểm thì điểm M ở câu a có xác định không ? Tại sao ?

GIẢI

a) $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$

$\Leftrightarrow \left(\overline{OA} - \overline{OM}\right)\left(\overline{OB} - \overline{OM}\right) = \left(\overline{OC} - \overline{OM}\right)\left(\overline{OD} - \overline{OM}\right)$

$\Leftrightarrow \overline{OM}\left(\overline{OD} + \overline{OC} - \overline{OA} - \overline{OB}\right) = \overline{OC}.\overline{OD} - \overline{OA}.\overline{OB}$

$\Leftrightarrow \overline{OM}(d + c - a - b) = cd - ab$

Vì a + b ≠ c + d nên c + d – a – b ≠ 0, vậy : $\overline{OM} = \dfrac{cd - ab}{d + c - a - b}$

Áp dụng :

Với a = – 2, b = 5, c = 3, d = – 1, ta thấy : a + b ≠ c + d nên điểm M được xác định và ta có :

$\overline{OM} = \dfrac{cd - ab}{d + c - a - b} = \dfrac{3.(-1) - (-2).5}{-1 + 3 + 2 - 5} = -7.$ Vậy M(– 7)

b) Giả sử AB và CD có cùng trung điểm I, khi đó :

$\dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} = \dfrac{\overline{OC} + \overline{OD}}{2} \quad \left(= \overline{OI}\right)$ (xem lại câu b bài 19)

hay a + b = c + d. Vậy điểm M không xác định.

Bài 24. Cho A, B là hai điểm trên trục (O; $\vec{i}$) và I là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta luôn có :

a) $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MI}^2 - \overline{IA}^2$

b) $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MI}^2 + 2\overline{IA}^2$

c) $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\overline{AB}.\overline{IM}$

GIẢI

a) $\overline{MA}.\overline{MB} = \left(\overline{MI} + \overline{IA}\right)\left(\overline{MI} + \overline{IB}\right)$

$= \left(\overline{MI} + \overline{IA}\right)\left(\overline{MI} - \overline{IA}\right) = \overline{MI}^2 - \overline{IA}^2$ (đpcm)

b) $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \left(\overline{MI} + \overline{IA}\right)^2 + \left(\overline{MI} + \overline{IB}\right)^2$

$= 2\overline{MI}^2 + \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + 2\overline{MI}\left(\overline{IA} + \overline{IB}\right) = 2\overline{MI}^2 + 2\overline{IA}^2$

(vì $\overline{IA} + \overline{IB} = 0$ và $IB^2 = IA^2$).

c) $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \left(\overline{MI} + \overline{IA}\right)^2 - \left(\overline{MI} + \overline{IB}\right)^2$

$= \left(\overline{MI} + \overline{IA}\right)^2 - \left(\overline{MI} - \overline{IA}\right)^2 = 4\overline{IA}.\overline{MI}$

Mà $\begin{cases} \overline{IA} = -\overline{AI} = -\dfrac{\overline{AB}}{2} \\ \overline{MI} = -\overline{IM} \end{cases}$ nên :

$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 4\left(\dfrac{\overline{AB}}{2}\right)\left(-\overline{IM}\right) = 2\overline{AB}.\overline{IM}$ (đpcm).

Chuyên đề 3

HỆ TRỤC TỌA ĐỘ ĐÊCAC VUÔNG GÓC

Kiến thức cơ bản

I) Hệ trục tọa độ vuông góc

Trong mặt phẳng, cho trục x'Ox có vectơ đơn vị $\vec{i}$, trục y'Oy có vectơ đơn vị $\vec{j}$ sao cho $\vec{i} \perp \vec{j}$.

Định nghĩa

Hệ gồm hai trục nói trên gọi là hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc, kí hiệu mp(Oxy).

- Trục x'Ox gọi là trục hoành độ. • Trục y'Oy gọi là trục tung độ.
- Điểm O gọi là gốc tọa độ.

II) Tọa độ của vectơ

Định lí

Trong mp(Oxy), cho vectơ $\vec{u}$ tùy ý. Khi đó, có duy nhất một cặp số thực (x; y) sao cho : $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

Định nghĩa

Nếu $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ thì cặp số x và y gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ đối với mp(Oxy), kí hiệu : $\vec{u} = (x; y)$

Tóm tắt : $\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

III) Phép tính

1) Tính chất

Trong mp(Oxy), cho $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$

c) $k.\vec{u} = (kx; ky)$

d) $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) Quan hệ giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$

a) $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$

b) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x'$ và $y = y'$

IV) Tọa độ của một điểm

1) Định nghĩa

Trong mp(Oxy), cho điểm M tùy ý. Khi đó, tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ gọi là tọa độ của điểm M, kí hiệu M(x; y)

Tóm tắt : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} \Leftrightarrow M(x; y)$

2) Định lí

a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

c) Điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số cho trước.

Định lí

Cho hai điểm : $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$

$$\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - k.x_B}{1 - k} \\ y_M = \dfrac{y_A - k.y_B}{1 - k} \end{cases} \quad (k \neq 1)$$

Đặc biệt, I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \end{cases}$

Bài 25. Trong mp(Oxy), viết tọa độ của các vectơ sau :

$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = \dfrac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}$; $\vec{c} = 3\vec{i}$; $\vec{d} = -2\vec{j}$

GIẢI

- Tọa độ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (2; 3)$
- Tọa độ $\vec{b} = \dfrac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{b} = (\dfrac{1}{3}; -5)$
- Tọa độ $\vec{c} = 3\vec{i} \Leftrightarrow \vec{c} = 3.\vec{i} + 0.\vec{j} \Leftrightarrow \vec{c} = (3; 0)$
- Tọa độ $\vec{d} = -2\vec{j} \Leftrightarrow \vec{c} = 0\vec{i} - 2\vec{j} \Leftrightarrow \vec{d} = (0; -2)$

Bài 26. Viết vectơ $\vec{u}$ dưới dạng $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ khi biết tọa độ của $\vec{u}$:

$\vec{u} = (2; -3)$; $\vec{u} = (-1; 4)$; $\vec{u} = (2; 0)$; $\vec{u} = (0; -1)$; $\vec{u} = (0; 0)$

GIẢI

- $\vec{u} = (2; -3) \Leftrightarrow \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$
- $\vec{u} = (-1; 4) \Leftrightarrow \vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j}$
- $\vec{u} = (2; 0) \Leftrightarrow \vec{u} = 2\vec{i} + 0\vec{j} \quad (\vec{u} = 2\vec{i})$
- $\vec{u} = (0; -1) \Leftrightarrow \vec{u} = 0\vec{i} + \vec{j} \quad (\vec{u} = \vec{j})$
- $\vec{u} = (0; 0) \Leftrightarrow \vec{u} = 0\vec{i} + 0\vec{j} \quad (\vec{u} = \vec{0})$

Bài 27. Cho $\vec{a} = (1; -2)$ và $\vec{b} = (0; 3)$.

Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

GIẢI

- Tọa độ của $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$

Ta có : $\vec{a} = (1; -2)$ và $\vec{b} = (0; 3)$

Nên : $\vec{x} = (1 + 0; -2 + 3) \Leftrightarrow \vec{x} = (1; 1)$

- Tọa độ của $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$

Ta có : $\vec{a} = (1; -2)$ và $\vec{b} = (0; 3)$

Nên : $\vec{y} = (1 - 0; -2 - 3) \Leftrightarrow \vec{y} = (-1; -5)$

- Tọa độ của $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

Ta có : $\vec{a} = (1; -2) \quad \Rightarrow 2\vec{a} = (2; -4)$

$\vec{b} = (0; 3) \quad \Rightarrow 3\vec{b} = (0; 9)$

Nên : $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{z} = (2 - 0; -4 - 9) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{z} = (2; -13)$

Bài 28. Cho ba điểm A = (– 1; 1), B = (1; 3), C = (– 2; 0) trong mp(Oxy).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm tỉ số mà điểm A chia đoạn thẳng BC, điểm B chia đoạn thẳng AC và điểm C chia đoạn thẳng AB.

GIẢI

a) ***Chứng minh A, B, C thẳng hàng***

Ta có : $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (2; 2) = 2(\vec{i} + \vec{j}) \qquad (1)$

$\vec{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A) = (-1; -1) = -(\vec{i} + \vec{j}) \qquad (2)$

So sánh (1) và (2) ta được : $\vec{AB} = -2\vec{AC} \Rightarrow \vec{AB}$ và $\vec{AC}$ cùng phương

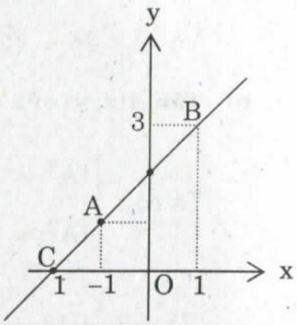
$\Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng.

b) • A chia đoạn thẳng BC theo tỉ số k = ?

Theo kết quả câu a, ta có : $\vec{AB} = -2\vec{AC}$

Vậy điểm A chia đoạn thẳng BC theo tỉ k = – 2

- **B chia đoạn thẳng AC theo tỉ số k' = ?**



Ta tìm k' sao cho $\vec{BA} = k'.\vec{BC}$

Ta có : $\begin{cases} \vec{BA} = (-2; -2) \\ \vec{BC} = (-3; -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{BA} = \dfrac{2}{3}\vec{BC}$

Vậy B chia đoạn thẳng AC theo tỉ số $k' = \dfrac{2}{3}$

- **C chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k" = ?**

Ta tìm k" sao cho $\vec{CA} = k''.\vec{CB}$

Ta có : $\begin{cases} \vec{CA} = (1; 1) \\ \vec{CB} = (3; 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{CA} = \dfrac{1}{3}\vec{CB}$

Vậy C chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k'' = \dfrac{1}{3}$

Bài 29. Cho tam giác ABC với A = $(x_1; y_1)$, B = $(x_2; y_2)$ và C = $(x_3; y_3)$ trong mp(Oxy). Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

GIẢI

G là trọng tâm của ABC, ta có :

$\Leftrightarrow \vec{MG} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\right)$, M là điểm tùy ý.

Chọn M ≡ O(0; 0), ta có : $\vec{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right)$

Vậy $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$ hay $G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

Bài 30. Cho ba điểm A = (4; 6), B = (5; 1), C = (1; – 3) trong mp(Oxy).

a) Tính chu vi của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và bán kính đường tròn đó.

GIẢI

a) **Chu vi của tam giác ABC :** $2p = AB + BC + CA$

Mà $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$

$CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$

Vậy $2p = \sqrt{26} + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{10}$

b) **Tâm I(x; y) của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC**

Ta có : $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - x)^2 + (6 - y)^2 = (5 - x)^2 + (1 - y)^2 \\ \left(4 - x\right)^2 + (6 - y)^2 = (1 - x)^2 + (-3 - y)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y + 13 = 0 \\ x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

* Bán kính $R = IA \Leftrightarrow R = \sqrt{\left(4 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(6 - \dfrac{5}{2}\right)^2} \Leftrightarrow R = \dfrac{1}{2}\sqrt{130}$

Bài 31. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai điểm : A(– 4; 1), B(2; – 2).
Tìm điểm M trên trục tung sao cho đường thẳng (AB) đi qua A.

✶ ***Hướng dẫn***

- M (0; y) ∈ Oy
- A, B, M thẳng hàng ⇔ $\vec{AB}$ và $\vec{AM}$ cùng phương.

GIẢI

- M ∈ Oy nên M(0; y)
- Đường thẳng (AB) qua M ⇔ M, A, B thẳng hàng

⇔ $\vec{AB}$ và $\vec{AM}$ cùng phương, mà $\vec{AB} = (6; -3)$ và $\vec{AM} = (4; y - 1)$ nên :

$\dfrac{4}{6} = \dfrac{y - 1}{-3} \Leftrightarrow y = -1$ **Đáp số :** M(0; – 1)

Bài 32. Trong mp(Oxy), tìm điểm N trên trục hoành sao cho ba điểm N, P(3; 4), Q(– 1; – 3) thẳng hàng.

✶ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 28 **Đáp số :** $N\left(\dfrac{5}{7}, 0\right)$

Bài 33. Trong mp(Oxy), cho ba điểm A(– 2; – 1), B(0; 4), C(2; 2).
Tìm điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

✶ ***Hướng dẫn***

- ABCD là hình bình hành ⇔ $\vec{AD} = \vec{BC}$
- Gọi (x; y) là tọa độ của D, tính tọa độ của $\vec{AD}$ và $\vec{BC}$ rồi cho $\vec{AD} = \vec{BC}$

GIẢI

- Gọi D(x; y), ta có : $\begin{cases} \vec{AD} = (x + 2; y + 1) \\ \vec{BC} = (2; -2) \end{cases}$
- ABCD là hình bình hành nên $\vec{AD} = \vec{BC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 2 \\ y + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$

Đáp số : D(0; – 3)

Bài 34. Trong mp(Oxy), cho bốn điểm :

A(– 1; 2) , B(– 3; 7) , C(– 5; 5) , D(– 3; 0).

Chứng minh ABCD là hình bình hành và tìm tọa độ tâm hình bình hành này.

✶ ***Hướng dẫn***

- Tìm tọa độ $\vec{AB}$ và $\vec{DC}$ rồi so sánh hai vectơ này.
- Tâm I của hình bình hành ABCD là trung điểm của AC (hoặc của BD)

Đáp số : $I\left(-3; \dfrac{7}{2}\right)$

Bài 35. Trong mp(Oxy), cho A(– 2; 4), B(– 4; 3), C(2; 1), D(1; 3)

a) **A, B, C có thẳng hàng không ? Tại sao ?**

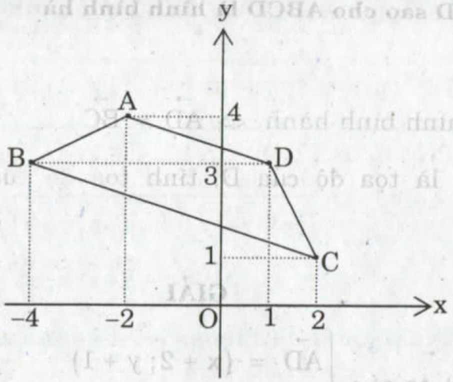
b) **Chứng minh ABCD là một hình thang cân, đáy BC**

✶ ***Hướng dẫn***

a) Xét phương của $\vec{AB}$ và $\vec{BC}$?

b) Chứng minh AD // BC và AB = DC, AD ≠ BC.

GIẢI



a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (6; -2)$

Vì $\dfrac{-2}{6} \neq \dfrac{-1}{-2}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương

⇒ A, B, C không thẳng hàng (i)

b) ABCD ?

* $\overrightarrow{AD} = (3; -1)$ và $\overrightarrow{BC} = (6; -2)$

Ta thấy $\dfrac{3}{6} = \dfrac{-1}{-2}$ nên $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương (ii)

– Từ (i) và (ii) ⇒ AD // BC (1).

Ngoài ra, ta có :

$AD = \sqrt{10}$, $BC = 2\sqrt{10}$, $AB = \sqrt{5}$, $DC = \sqrt{5}$

⇒ AB = DC và AD ≠ BC (2)

Từ (1) và (2) ⇒ ABCD là hình thang cân có đáy BC, AD.

Bài 36. Trong mp(Oxy), cho ba điểm A(– 2, – 5), B(2; 3), C(0; 4)

a) Chứng minh A, B, C không ở trên cùng một đường thẳng.

b) Tìm điểm D trên trục hoành Ox sao cho ABCD là hình thang có CD và AB.

ABCD có phải là hình thang vuông không ?

★ ***Hướng dẫn***

a) Giải giống câu a bài 32.

b) Gọi D(x; 0) ∈ Ox

ABCD là hình thang đáy AB và CD ⇔ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng phương.

Tính AC^2, BC^2, AB^2 rồi so sánh AC^2 với $AB^2 + BC^2$.

Đáp số : D(– 2; 0) và ABCD là hình thang vuông tại B và C.

Bài 37. Trong mp(Oxy), cho tam giác ABC : A(0, 6), B(– 2; 2), C(4; 4)

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông cân.

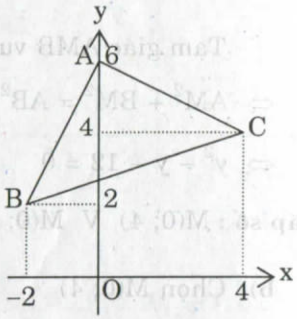
b) Tính diện tích tam giác ABC.

★ ***Hướng dẫn***

a) Tính AB, BC, AC ta được kết quả.

b) Dùng công thức tính diện tích tam giác vuông.

GIẢI



a) Ta có : $\begin{cases} AB = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5} \\ AC = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5} \\ BC = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ BC^2 = AB^2 + AC^2 \end{cases}$

⇒ ABC là tam giác vuông cân tại A.

b) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{5}.2\sqrt{5} = 10$ (đvdt).

Bài 38. Trong mp(Oxy), cho tam giác ABC, biết A(– 1; 5), B(– 3; 1) và C(1; 4). Chứng minh ABC là tam giác vuông.

Tính chu vi của tam giác ABC ?

★ ***Hướng dẫn***

Tính AB, AC, BC rồi dùng định lí Pitago đảo.

Đáp số : Tam giác ABC vuông tại A và có chu vi $2p = 3\sqrt{5} + 5$

Bài 39. Trong mp(Oxy), cho A(– 2; 1), B(6; 0)

a) Tìm điểm M trên trục tung sao cho tam giác AMB vuông tại M.

b) Chọn M (câu a) có tung độ dương.

Tìm điểm C sao cho AMBC là hình chữ nhật.

★ ***Hướng dẫn***

a) M(0; y) ∈ Oy.

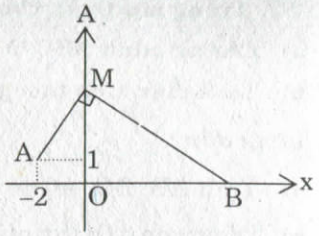
Tính AM^2, BM^2, AB^2.

Dùng định lí Pitago.

b) Vì $\widehat{AMB} = 90^0$ nên AMBC là hình chữ nhật

⇔ AMBC là hình bình hành ⇔ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$

GIẢI



a) M ∈ Oy nên M(0; y), ta có :

$$\begin{cases} AM^2 = 4 + (y-1)^2 \\ BM^2 = 36 + y^2 \\ AB^2 = 64 + 1 = 65 \end{cases}$$

Tam giác AMB vuông tại M

$\Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2 \quad \Leftrightarrow 2y^2 - 2y + 41 = 65$

$\Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow y = 4 \ \vee \ y = -3$

Đáp số : M(0; 4) V M(0; – 3)

b) Chọn M(0; 4)

$\widehat{AMB} = 90^0$ nên AMBC là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow$ AMBC là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$

$$\text{mà} \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-2; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (x_C - 6; y_C) \end{cases} \text{nên} \begin{cases} x_C - 6 = -2 \\ y_C = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = -3 \end{cases}$$

Đáp số : C(4; – 3)

Bài 40. Trong mp(Oxy), cho bốn điểm A(– 3; 0), B(– 6; 2), C(– 2; 8), D(1; 6). Chứng minh ABCD là hình chữ nhật.

★ ***Hướng dẫn***

- Chứng minh $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ bằng nhau.
- Tính AB^2, BC^2, AC^2 rồi dùng định lí Pitago đảo.

Bài 41. Trong mp(Oxy), cho A(– 4; 3), B(– 1; 7). Có tìm được điểm C để OABC là hình vuông không ? Giải thích ? Nếu có, hãy cho biết tọa độ của C ? (O là gốc tọa độ)

★ ***Hướng dẫn***

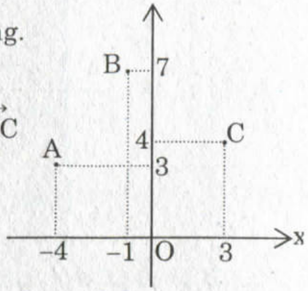
- Tính OA, OB, AB rồi chứng minh tam giác OAB vuông cân tại A nên tồn tại C sao cho OABC là hình vuông.
- Từ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ ta sẽ tìm được tọa độ C.

GIẢI

- Ta có : $OA = 5$, $AB = 5$, $OB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} OA = AB \\ OA^2 + AB^2 = OB^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Tam giác OAB vuông cân tại A.}$$

Vậy tồn tại điểm C để OABC là hình vuông.



- Tọa độ C

Khi OABC là hình vuông, ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

$$\text{Mà} \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3; 4) \\ \overrightarrow{OC} = (x_C; y_C) \end{cases} \text{nên} \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 4 \end{cases}$$

Đáp số : C(3; 4)

Bài 42. Trong mp(Oxy), cho bốn điểm M(1; 2), N(– 3; 5), P(0; 9), Q(4; 6). Chứng minh MNPQ là hình vuông.

★ ***Hướng dẫn***

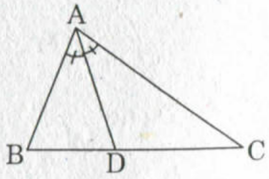
- Tính $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{QP}$ $\Rightarrow$ .... $\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành.
- Tính MN^2, NP^2, MP^2 $\Rightarrow$ .... $\Rightarrow$ $MN \perp NP$ và $MN = NP$

Bài 43. Trong mp(Oxy), cho tam giác ABC : A(1; 6), B(4; 0), C(9; 10).

a) Tìm giao điểm của BC với phân giác trong của góc $\widehat{A}$.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

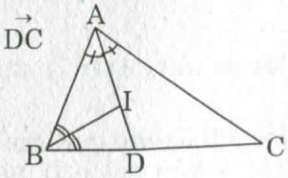
★ ***Hướng dẫn***



a) Sử dụng công thức phân giác

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = k$$

$\Leftrightarrow DB = k.DC \quad \left(k = \dfrac{AB}{AC} > 0\right)$



Vì $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{DB} = -k.\overrightarrow{DC}$

(D chia đoạn BC theo tỉ số – k)

b) Tiếp tục giống câu a đối với tam giác ABD.

GIẢI

$$\text{a) Ta có : } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{với} \begin{cases} AB = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5} \\ AC = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy $\frac{DB}{DC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow DB = \frac{3}{4}DC$

Mà $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ là hai vectơ ngược hướng nên $\overrightarrow{DB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

(D chia đoạn BC theo tỉ số $= -\frac{3}{4}$), do đó :

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + \frac{3}{4}x_C}{1 + \frac{3}{4}} = \dfrac{43}{7} \\[2ex] y_D = \dfrac{y_B + \frac{3}{4}y_C}{1 + \frac{3}{4}} = \dfrac{30}{7} \end{cases}$$

Đáp số : $D\left(\frac{43}{7}; \frac{30}{7}\right)$

b) Vẽ phân giác trong của $\hat{B}$, phân giác này cắt AD tại I

⇒ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Ta có : $\frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD}$ với $\begin{cases} BA = 3\sqrt{5} \\ BD = \frac{15}{7}\sqrt{5} \end{cases}$

Vậy $\frac{IA}{ID} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow IA = \frac{7}{5}ID$

Mà $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{ID}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{IA} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{ID}$

Do đó : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + \frac{7}{5}x_D}{1 + \frac{7}{5}} = 4 \\[2ex] y_I = \dfrac{y_A + \frac{7}{5}y_D}{1 + \frac{7}{5}} = 5 \end{cases}$

Đáp số : I(4; 5)

Bài 44. Trong mp(Oxy), tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết A(– 4; 1), B(2; – 2), C(– 8; – 7)

★ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 40.

Đáp số : I(– 3; – 2)

Bài 45. Trong mp(Oxy), cho A(– 5; 0), B(– 1; 3), C(2; 7), D(– 2; 4)
Chứng minh ABCD là hình thoi. Tính chu vi và diện tích của ABCD.

★ ***Hướng dẫn***

- Tính $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ ⇒ .... ⇒ ABCD là hình bình hành.
- Tính AB và BC ⇒ AB = BC

Chu vi (ABCD) = 4AB

Diện tích (ABCD) = $\frac{1}{2}$ AC.BD

Đáp số : ABCD là hình thoi có độ dài mỗi cạnh = 5 và diện tích = 7 (đvdt)

Bài 46. Trong mp(Oxy), cho tam giác ABC với A(– 3; 0), B(2; 4) và C(1; 5).
Chứng minh tam giác ABC cân tại A. Tính diện tích tam, giác ABC.

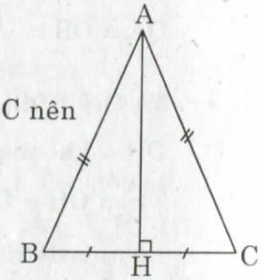
★ ***Hướng dẫn***

– Tính và so sánh AB và AC.

– Tìm tọa độ trung điểm H của BC, ta có AH ⊥ BC nên

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$

Đáp số : $AB = AC = \sqrt{41}$ $\quad S_{\Delta ABC} = \frac{9}{2}$ (đvdt)



Bài 47. Trong mp(Oxy), cho hai điểm A(4; 1) và B(– 2; 5). Tìm điểm M trên trục Ox sao cho tam giác MAB cân tại M. Trong trường hợp này chứng minh tam giác MAB vuông cân.

★ ***Hướng dẫn***

- M(x; 0)
- Tính MA^2 và MB^2 rồi cho MA = MB

Đáp số : M(– 1; 0)

Sau khi tìm được M, tính MA^2, MB^2 và AB^2 rồi dùng định lí Pitago.

Bài 48. Trong mp(Oxy), cho hai điểm A(– 2; 3) và B(3; 1). Gọi (m; n) là tọa độ điểm M.
Chứng minh điều kiện cần và đủ để M ở trên đường trung trực của đoạn thẳng AB là : 10m – 4n + 3 = 0

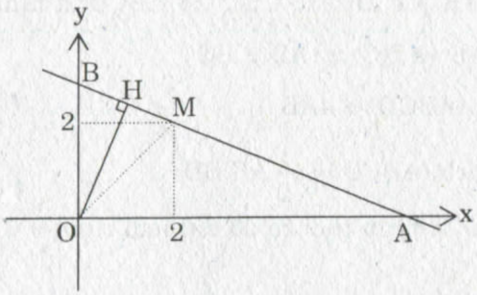
★ ***Hướng dẫn***

M ở trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

⇔ MA = MB với $MA^2 = (m + 2)^2 +$ ...... và $MB^2 =$ ...... $+ (n - 1)^2$

Bài 49. Trong mp(Oxy), cho điểm M(2; 2). Đường thẳng (d) qua M và cắt tia Ox và tia Oy lần lượt tại A và B.

Xác định vị trí của (d) sao cho khoảng cách từ O(0; 0) đến (d) dài nhất. Trong trường hợp này, tìm tọa độ của A và B ?



★ *Hướng dẫn*

- Vẽ OH ⊥ (d), H ∈ (d), chứng minh OH ≤ hằng số.
- Khi OH dài nhất thì tam giác OAB vuông cân tại O nên :

  $OA = OB = \sqrt{2}.OM$

GIẢI

- Vẽ OH ⊥ (d), H ∈ (d)

  OH = khoảng cách từ O(0; 0) đến (d)

  Ta có $OH \le OM = 2\sqrt{2}$ (hằng số)

  Vậy $\max(OH) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow H \equiv M$, lúc đó OM ⊥ (d).

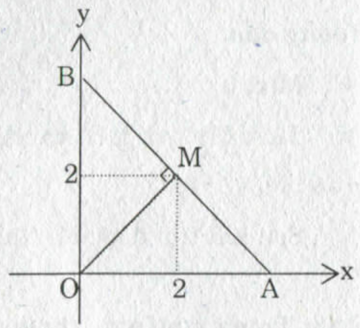
  Vậy khoảng cách từ O(0; 0) đến (d) dài nhất ⇔ (d) ⊥ OM.

- Khi (d) ⊥ OM thì tam giác OAB vuông cân tại O(0; 0)

  (Vì OM vừa là đường cao vừa là đường phân giác vẽ từ O(0; 0) của tam giác OAB).

  Vậy $OA = OB = OM\sqrt{2} = 4$

  Do đó : A(4; 0) và B(0; 4)



Bài 50. Trong mp(Oxy), cho ba điểm A(a; b), M(– 1; 3) và N(3; 5).

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác AMN vuông tại A là : $a^2 + b^2 - 2a - 8b + 12 = 0$

★ *Hướng dẫn*

Tam giác AMN vuông tại A $\Leftrightarrow AM^2 + AN^2 = MN^2$

GIẢI

Tam giác AMN vuông tại A $\Leftrightarrow AM^2 + AN^2 = MN^2$ (*)

$$\text{Ta có : } \begin{cases} AM^2 = (a+1)^2 + (b-3)^2 \\ AN^2 = (a-3)^2 + (b-5)^2 \\ MN^2 = 16 + 4 = 20 \end{cases}$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow (a+1)^2 + (b-3)^2 + (a-3)^2 + (b-5)^2 = 20$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 4a - 16b + 24 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a - 8b + 12 = 0$ (đpcm).

Bài 51. Trong mp(Oxy), cho bốn điểm A(– 2; 5), B(6; – 1), C(– 1; – 2), D(5; 6).

Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có tâm là trung điểm AB. ABCD là hình gì ?

★ *Hướng dẫn*

◆ **Cách 1 :** Chứng minh tam giác ABC vuông tại C và tam giác ADB vuông tại D

(bằng cách tính AC^2, BC^2, AB^2, ... rồi dùng định lí Pitago đảo)

◆ **Cách 2 :** Tìm tọa độ trung điểm I của AB rồi tính IA, IB, IC, ID.

Đáp số : ABCD là hình chữ nhật

Bài 52. Trong mp(Oxy), cho bốn điểm A(4; – 1), B(– 2; 1), C(4; – 5), D(2; – 7).

a) Tìm điểm I ở trên trục tung và cách đều hai điểm A và B.

b) Với điểm I tìm được ở câu a, chứng minh rằng I cũng cách đều C và D. Kết luận gì về tứ giác ABDC ?

★ *Hướng dẫn*

a) Gọi I(0; y)

I cách đều A và B nên IA = Ib

Tính IA^2 và IB^2 theo y rồi cho $IA^2 = IB^2$

Đáp số : I(0; – 3)

b) Khi có tọa độ I, tính IC và ID ta có kết quả

So sánh bốn đoạn IA, IB, IC, ID.

Tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn tâm I, bán kính $R = 2\sqrt{5}$

Bài 53. Trong mp(Oxy), cho ba điểm A(– 4; 6), B(– 2; – 1), C(3; 4).

Tìm điểm M trên trục hoành sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ ngắn nhất.

★ *Hướng dẫn*

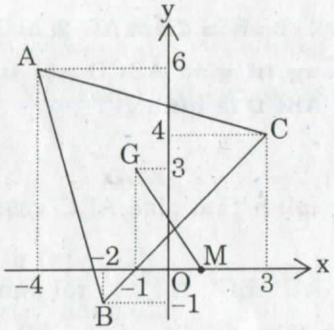
Sử dụng công thức $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ (G là trọng tâm tam giác ABC)

GIẢI

- Ta có $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ với G là trọng tâm tam giác ABC

$$G\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = -1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3 \end{cases} \quad G(-1;3)$$

Vậy $d = \left|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\right| = 3\left|\vec{MG}\right| = 3MG$



- d ngắn nhất $\Leftrightarrow$ MG ngắn nhất $\Leftrightarrow MG \perp Ox$.

Lúc đó M(– 1; 0) và min(d) = 3MG = 9

◆ Cách khác

Gọi M(x; 0), tìm tọa độ của $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{MC}$ rồi suy ra tọa độ của vectơ $\vec{MA} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(-3-3x)^2 + 81}$ hay

$|\vec{u}| = 3\sqrt{9 + (x+1)^2} \geq 9 \Leftrightarrow x = -1$

Bài 54. Trong mp(Oxy), cho ba điểm A(– 4; 2), B(– 7; 1), C(– 1; 0). Tìm điểm M trên trục tung sao cho vectơ $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

★ *Hướng dẫn*

Giải giống bài 53.

Đáp số : M(0; 1) và min $\left|\vec{v}\right|$ = 12

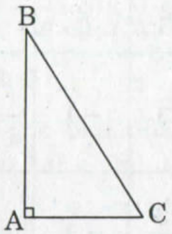
Chuyên đề 4 TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

Kiến thức cơ bản

I) Tỉ số lượng giác của góc $\alpha \in [0^0; 180^0]$

1) Mở đầu

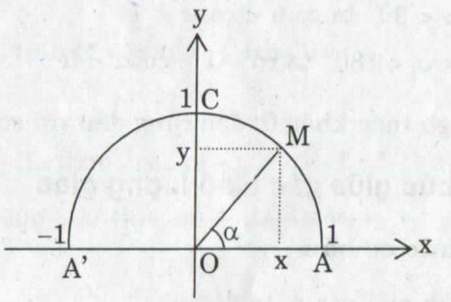
Tam giác ABC vuông tại A, ta có :



- $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$
- $\cos B = \dfrac{AB}{BC}$
- $\text{tg}B = \dfrac{AC}{AB}$
- $\text{cotg}C = \dfrac{AC}{AB}$

2) Tỉ số lượng giác của một góc

Trong hệ trục tọa độ Oxy, vẽ nửa đường tròn đơn vị (bán kính R = 1), nửa đường tròn này cắt trục x'Ox tại A và A', cắt tia Oy tại C với A'(– 1; 0), A(1; 0), C(0; 1)



a) Định nghĩa

Trên nửa đường tròn đơn vị (bán kính R = 1) lấy điểm M(x; y).

Đặt $\alpha = \widehat{AOM}$ $(0^0 \leq \alpha \leq 180^0)$, ta có :

- Tung độ y của M gọi là sin của góc α, kí hiệu sinα và ta có sinα = y.
- Hoành độ x của M gọi là cosin của góc α, kí hiệu cosα và ta có cosα = x.
- Tỉ số $\dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ gọi là tang của góc α, kí hiệu tgα và ta có $\text{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$.
- Tỉ số $\dfrac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ gọi là cotang của góc α, kí hiệu cotgα và ta có $\text{tg}\alpha = \dfrac{x}{y}$.

b) Tỉ số lượng giác của một số góc cần nhớ

Góc	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖

c) Dấu của các tỉ số lượng giác

- $\sin\alpha \geq 0$ với mọi góc $\alpha \in [0^0; 180^0]$
- $\left[\begin{array}{l} \text{Với } 0 < \alpha < 90^0 \text{ ta có } 0 < \cos\alpha < 1 \\ \text{Với } 90^0 < \alpha < 180^0 \text{ ta có } -1 < \cos\alpha < 0 \end{array}\right.$
- $\text{tg}\alpha$ và $\text{cotg}\alpha$ (nếu khác 0) đều cùng dấu với $\cos\alpha$.

II) Các hệ thức giữa các tỉ số lượng giác

1) Các hệ thức cơ bản

Định lí : Với mọi góc α, ta đều có :

a) Nếu $\cos\alpha \neq 0$ thì $\text{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

b) Nếu $\sin\alpha \neq 0$ thì $\text{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

c) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) Các hệ thức khác

Định lí :

a) Nếu $\cos\alpha \neq 0$, ta có : $1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

b) Nếu $\sin\alpha \neq 0$, ta có : $1 + \text{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

3) Liên hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc bù nhau

a) $(180^0 - \alpha)$ và α là hai góc bù nhau

Định lí

Hai góc bù nhau có sin bằng nhau, còn cosin thì đối nhau, nghĩa là :

- $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

Do đó $\begin{cases} \text{tg}(180^0 - \alpha) = -\text{tg}\alpha \\ \text{cotg}(180^0 - \alpha) = -\text{cotg}\alpha \end{cases}$

b) $(90^0 - \alpha)$ và α là hai góc phụ nhau

Định lí

Hai góc phụ nhau thì sin của góc này bằng cosin của góc kia và ngược lại, nghĩa là :

- $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

Do đó $\begin{cases} \text{tg}(90^0 - \alpha) = \text{cotg}\alpha \\ \text{cotg}(90^0 - \alpha) = \text{tg}\alpha \end{cases}$

Toán

Bài 55. **Biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, tính $P = 3\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha$**

★ *Hướng dẫn*

- Biết $\cos\alpha$, dùng hệ thức : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ để có $\sin\alpha$.
- Biết $\sin\alpha$, vẫn dùng hệ thức đó để biết $\cos\alpha$.

GIẢI

Ta có : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (định lí)

Mà $\cos\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{4}$ nên :

$$\frac{1}{4} + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Do đó : $P = 3\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 3.\left(\dfrac{3}{4}\right) + 4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{13}{4}$.

Bài 56.

a) **Cho góc nhọn β và** $\sin\beta = \frac{1}{4}$**. Tính cosβ và tgβ ?**

b) **Cho góc α và** $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$**. Tính sinα, tgα và cotgα.**

c) **Cho** $\mathrm{tg}x = 2\sqrt{2}$**. Tính sinx và cosx**

GIẢI

a) **Tính cosβ**

Ta có : $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ (định lí)

Mà $\sin\beta = \frac{1}{4}$ nên $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ (i)

Vì β là góc nhọn nên cosβ > 0, do đó từ (i) ta có : $\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

◆ **Tính tgβ**

Ta có : $\mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ (định lí) $= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$

b) Từ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (định lí), ta có : $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ mà sinα > 0 nên **sinα =** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

◆ **Tính tgα**

Ta có $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -2\sqrt{2}$

◆ **Tính cotgα**

Ta có $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \left(-\frac{1}{3}\right) : \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

c) Ta có $\mathrm{tg}x = 2\sqrt{2} > 0$ nên sinx > 0 và cosx > 0

ùng hai công thức : $\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x \\ \frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}x \end{cases}$

- Ta có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x = 1 + (2\sqrt{2})^2 = 9 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{9}$ (i)

  Vì tgx > 0 nên cosx > 0, do đó từ (i) ta có $\cos x = \frac{1}{3}$.

- Ta có $\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}x \Leftrightarrow \sin x = \cos x.\mathrm{tg}x = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Bài 57. Chứng minh hằng đẳng thức : $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x.\cos x$

★ ***Hướng dẫn***

- Sử dụng $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

GIẢI

Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x} + 2\sin x.\cos x$

$= 1 + 2\sin x.\cos x$ (đpcm)

Vậy $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x.\cos x$.

Bài 58. Chứng minh hằng đẳng thức : $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x.\cos x$

★ ***Hướng dẫn***

Tương tự bài 57

GIẢI

Ta có : $(\sin x - \cos x)^2 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 - 2\sin x.\cos x$

$= \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x} - 2\sin x.\cos x$

$= 1 - 2\sin x.\cos x$ (đpcm)

Bài 59. Chứng minh hằng đẳng thức : $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

★ ***Hướng dẫn***

- Áp dụng công thức : $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

GIẢI

Áp dụng công thức $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, ta có :

$\sin^4 x + \cos^4 x = \underbrace{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

$= 1^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

Vậy $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

Bài 60. Chứng minh hằng đẳng thức :

sinx.cosx(1 + tgx)(1 + cotgx) = 1 + 2sinx.cosx

★ Hướng dẫn

- Khai triển $(1 + tgx)(1 + cotgx)$ rồi sau đó tính và rút gọn vế trái. (dùng công thức $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ và $cotgx = \frac{\cos x}{\sin x}$)

GIẢI

Ta có : $$(1 + tgx)(1 + cotgx) = \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right)\left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} + 1$$

$$= 2 + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x.\cos x} = 2 + \frac{1}{\sin x.\cos x}$$

Do đó : $$\sin x.\cos x(1 + tgx)(1 + cotgx) = \sin x.\cos x\left(2 + \frac{1}{\sin x.\cos x}\right)$$

$$= 2\sin x.\cos x + 1 \text{ (đpcm)}$$

Bài 61. Đơn giản biểu thức : $A = \cos y + \sin y.tgy$

★ Hướng dẫn

Dùng hai công thức $tgy = \frac{\sin y}{\cos y}$ và $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$

GIẢI

$$A = \cos y + \sin y.tgy = \cos y + \sin y.\frac{\sin y}{\cos y}$$

$$= \cos y + \frac{\sin^2 y}{\cos y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos y} = \frac{1}{\cos y}$$

Bài 62. Đơn giản biểu thức : $B = \sqrt{1 + \cos b}.\sqrt{1 - \cos b}$

★ Hướng dẫn

Sử dụng công thức $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $(a, b \geq 0)$ và chú ý $1 - \cos^2 b = \sin^2 b$

GIẢI

$$B = \sqrt{1 + \cos b}.\sqrt{1 - \cos b} = \sqrt{(1 + \cos b).(1 - \cos b)}$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 b} = \sqrt{\sin^2 b} = |\sin b|$$

Vì $\sin b \geq 0$ nên $|\sin b| = \sin b$, do đó : $B = \sin b$

Bài 63. Đơn giản biểu thức : $C = \sin a\sqrt{1 + tg^2 a}$ với $90^0 < a < 180^0$.

★ Hướng dẫn

- Sử dụng công thức $1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$
- $\sqrt{A^2} = |A|$
- $90^0 < a < 180^0 \Rightarrow \cos a < 0$

GIẢI

- Ta có $C = \sin a\sqrt{1 + tg^2 a} = \sin a.\sqrt{\frac{1}{\cos^2 a}} = \frac{\sin a}{|\cos a|}$
- Vì $90^0 < a < 180^0$ nên $\cos a < 0 \Rightarrow |\cos a| = -\cos a$

  Vậy $C = \frac{\sin a}{-\cos a} = -tga$

Bài 64. Tính : $\cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 + \cos^2 1^0 + \cos^2 89^0$

★ Hướng dẫn

- Sử dụng định lí về tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.
- Công thức $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

GIẢI

- Vì $12^0 + 78^0 = 90^0$, nghĩa là 12^0 và 78^0 là hai góc phụ nhau.

  Do đó : $\cos 78^0 = \sin 12^0$

$\Rightarrow$ $\cos^2 78^0 = \sin^2 12^0$

$\Rightarrow$ $\cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 = \cos^2 12^0 + \sin^2 12^0 = 1$

- Tương tự : 1^0 và 89^0 là hai góc phụ nhau nên $\cos 98^0 = \sin 1^0$

$\Rightarrow$ $\cos^2 1^0 + \cos^2 89^0 = \cos^2 1^0 + \sin^2 1^0 = 1$

Tóm lại $\cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 + \cos^2 1^0 + \cos^2 89^0 = 2$

Bài 65. Tính : $T = \sin^2 3^0 + \sin^2 15^0 + \sin^2 75^0 + \sin^2 87^0$

★ Hướng dẫn

Tương tự bài 64

Ta có $T = (\sin^2 3^0 + \sin^2 87^0) + (\sin^2 15^0 + \sin^2 75^0)$

GIẢI

- Ta có $\sin^2 3^0 + \sin^2 87^0 = \sin^2 3^0 + \cos^2 3^0 = 1$
- Tương tự $\sin^2 15^0 + \sin^2 75^0 = \sin^2 15^0 + \cos^2 15^0 = 1$

Vậy $T = \sin^2 3^0 + \sin^2 15^0 + \sin^2 75^0 + \sin^2 87^0 = 2$

Bài 66. Đơn giản biểu thức : $A = \sin(90^0 - x).\cos(180^0 - x)$

★ *Hướng dẫn*

Sử dụng định lí về tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, hai góc bù nhau.

GIẢI

- $\sin(90^0 - x) = \cos x$ vì $(90^0 - x)$ và x là hai góc phụ nhau
- $\cos(180^0 - x) = -\cos x$ vì $(180^0 - x)$ và x là hai góc bù nhau

Do đó : $A = \sin(90^0 - x).\cos(180^0 - x) = \cos x(-\cos x) = -\cos^2 x$

Bài 67. Đơn giản biểu thức sau : $B = \cos(90^0 - x).\sin(180^0 - x)$

★ *Hướng dẫn*

Sử dụng định lí về tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, hai góc bù nhau.

GIẢI

- cos ~~sin~~$(90^0 - x) =$ sin ~~cosx~~ vì $(90^0 - x)$ và x là hai góc phụ nhau
- $\sin(180^0 - x) = \sin x$ vì $(180^0 - x)$ và x là hai góc bù nhau

Do đó : $B = \cos(90^0 - x).\sin(180^0 - x) = \sin x.\sin x = \sin^2 x$

Bài 68. Biết rằng $\sin 15^0 = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc 15^0.

GIẢI

◆ **Tính $\cos 15^0$**

Ta có : $\cos^2 15^0 + \sin^2 15^0 = 1$ (1)

Mà $\sin^2 15^0 = \left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{8 - 4\sqrt{3}}{16}$

Từ (1) ta có : $\cos^2 15^0 = 1 - \sin^2 15^0$

$$= 1 - \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2}{16}$$

Vậy $\cos 15^0 = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ (vì $\cos 15^0 > 0$)

◆ **Tính $\mathrm{tg}15^0$**

$$\mathrm{tg}15^0 = \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

◆ **Tính $\mathrm{cotg}15^0$**

$$\mathrm{cotg}15^0 = \frac{\cos 15^0}{\sin 15^0} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

Bài 69. Chứng minh rằng : $\mathrm{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \mathrm{cotg}^2\alpha.\cos^2\alpha$

★ *Hướng dẫn*

Dùng các công thức $\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ và $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ để biến đổi vế trái thành vế phải (hoặc ngược lại)

GIẢI

Ta có : $\mathrm{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha$

$$= \cos^2\alpha\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) = \cos^2\alpha\left(\frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$$

$$= \cos^2\alpha.\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \mathrm{cotg}^2\alpha.\cos^2\alpha \text{ (đpcm)}$$

◆ **Cách khác :**

Ta có : $\mathrm{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)$

$$= \cos^2\alpha(1 + \mathrm{cotg}^2\alpha - 1) = \mathrm{cotg}^2\alpha.\cos^2\alpha$$

(vì $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha$)

Bài 70. Chứng minh rằng : $\mathrm{tg}^2x - \sin^2x = \mathrm{tg}^2x.\sin^2x$

★ *Hướng dẫn*

Giải giống bài 69 bằng cách dùng công thức $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ và

$1 - \cos^2x = \sin^2x$ hoặc $\dfrac{1}{\cos^2x} = 1 + \mathrm{tg}^2x$

Bài 71. **Cho $90^0 < a < 180^0$, chứng minh rằng :**

$$\sqrt{\cos^2 a(1 - \text{tga}) + \sin^2 a(1 - \text{cotga})} = \sin a - \cos a \quad (*)$$

★ ***Hướng dẫn***

- Khai triển vế trái : Dùng công thức $\text{tga} = \dfrac{\sin a}{\cos a}$, $\text{cotga} = \dfrac{\cos a}{\sin a}$ và $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$.
- $90^0 < a < 180^0$ nên $\sin a > 0$ và $\cos a < 0$

GIẢI

Đặt T = vế trái của (*), ta có :

$$T = \sqrt{\cos^2 a\left(1 - \frac{\sin a}{\cos a}\right) + \sin^2 a\left(1 - \frac{\cos a}{\sin a}\right)}$$

$$= \sqrt{\cos^2 a - 2\sin a.\cos a + \sin^2 a}$$

$$= \sqrt{(\cos a - \sin a)^2} = |\cos a - \sin a|$$

Vì $90^0 < a < 180^0$ nên $\cos a < 0$ và $\sin a > 0$, do đó $\cos a - \sin a < 0$

$\Rightarrow |\cos a - \sin a| = \sin a - \cos a$

Vậy $T = \sin a - \cos a$ (đpcm)

Bài 72. **Chứng minh nếu $0^0 < a < 90^0$ thì :**

$$\sqrt{\sin^2 a(1 + \text{cotga}) + \cos^2 a(1 + \text{tga})} = \sin a + \cos a$$

★ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 71 và chú ý rằng $0^0 < a < 90^0$ nên $\cos a > 0$, $\sin a > 0$

$\Rightarrow |\sin a + \cos a| = \sin a + \cos a$

Bài 73. **Chứng minh đẳng thức $\dfrac{2\cos^2 x - 1}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x$**

★ ***Hướng dẫn***

Biến đổi vế trái thành vế phải bằng cách chú ý :

$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ và $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

GIẢI

$$\text{Ta có } \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x - \sin x} = \frac{2\cos^2 x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos x - \sin x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x}$$

$$= \cos x + \sin x \text{ (đpcm)}$$

Bài 74. **Chứng minh đẳng thức $\dfrac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x$**

★ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 73.

Bài 75. **Biết $\text{tg}\alpha = 2$, tính giá trị biểu thức $T = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$**

★ ***Hướng dẫn***

Chia tử và mẫu của T cho $\cos\alpha$ và chú ý $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\alpha$

GIẢI

$$\text{Ta có } T = \frac{\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{3\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{2\text{tg}\alpha - 3}{3\text{tg}\alpha + 2} = \frac{2(2) - 3}{3(2) + 2} = \frac{1}{8}$$

Bài 76. **Tính giá trị biểu thức $T = \dfrac{4\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + 4\sin\alpha}$, biết $\text{cotg}\alpha = -\sqrt{3}$**

★ ***Hướng dẫn***

Chia tử và mẫu của T cho $\sin\alpha$ và dùng công thức $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \text{cotg}\alpha$

Đáp số : T = 4

Bài 77. **Biết $a \in (0^0; 90^0)$ và $\sin a.\cos a = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.**

Tính giá trị biểu thức E = sina + cosa.

★ ***Hướng dẫn***

Tính E^2 = ... ⇒ E = ...

Chú ý : $0^0 < a < 90^0 \Rightarrow \cos a > 0$ và $\sin a > 0$

GIẢI

- Vì $0^0 < a < 90^0$ nên $\cos a > 0$, $\sin a > 0 \Rightarrow E > 0$
- Ta có $E^2 = (\sin a + \cos a)^2 = \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin a.\cos a$

$$= 1 + \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{9} = \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

Vậy $E = \dfrac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$ (vì E > 0)

Bài 78. **Biết $90^0 < x < 180^0$ và $\sin x.\cos x = -\dfrac{1}{2}$.**

Tính giá trị biểu thức T = cosx − sinx.

★ *Hướng dẫn*

- $90^0 < x < 180^0 \Rightarrow \cos x < 0$ và $\sin x > 0 \Rightarrow T < 0$
- Tính $T^2 =$ .... $\Rightarrow |T| =$ .... mà $T < 0$ nên $T =$ ....

Đáp số : $T = -\sqrt{2}$

Bài 79. Biết $tg\alpha + cotg\alpha = m$.

Tính theo m giá trị biểu thức : $T = tg^3\alpha + cotg^3\alpha$

★ *Hướng dẫn*

Áp dụng công thức $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$

$$= (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$$

Chú ý : $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ và $cotg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ nên $tg\alpha.cotg\alpha = 1$

GIẢI

Ta có $T = (tg\alpha + cotg\alpha)(tg^2\alpha + cotg^2\alpha - tg\alpha.cotg\alpha)$

$$= (tg\alpha + cotg\alpha)[(tg\alpha + cotg\alpha)^2 - 3tg\alpha.cotg\alpha] = m(m^2 - 3)$$

Đáp số : $T = m^3 - 3m$

Bài 80. Tính giá trị biểu thức : $A = tg^3\alpha - cotg^3\alpha$ biết $tg\alpha - cotg\alpha = -2$.

★ *Hướng dẫn*

Dùng công thức $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$

$$= (a-b)[(a-b)^2 + 3ab]$$

Đáp số : $A = -14$.

Bài 81. Tính giá trị biểu thức : $A = \dfrac{2\sin^2 a - 3\cos^2 a - 1}{\cos^2 a + 4\sin^2 a + 2}$ biết $tga = -\sqrt{5}$

★ *Hướng dẫn*

Biến đổi A theo $\sin^2 a$ và $\cos^2 a$ bằng cách chú ý $1 = \sin^2 a + \cos^2 a$ và $2 = 2(\sin^2 a + \cos^2 a)$

Sau đó chia tử và mẫu của A cho $\cos^2 a$ và chú ý $\dfrac{\sin a}{\cos a} = tga$.

GIẢI

Ta có $A = \dfrac{2\sin^2 a - 3\cos^2 a - (\sin^2 a + \cos^2 a)}{\cos^2 a + 4\sin^2 a + 2(\sin^2 a + \cos^2 a)}$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\sin^2 a - 4\cos^2 a}{6\sin^2 a + 3\cos^2 a} = \frac{\dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \dfrac{4\cos^2 a}{\cos^2 a}}{\dfrac{6\sin^2 a}{\cos^2 a} + \dfrac{3\cos^2 a}{\cos^2 a}}$$

$$= \frac{tg^2 a - 4}{6tg^2 a + 3} = \frac{(-\sqrt{5})^2 - 4}{6(-\sqrt{5})^2 + 3} = \frac{1}{33}$$

Bài 82. Tính giá trị biểu thức : $T = \dfrac{3 - 2\sin^2 x - 5\cos^2 x}{1 + \sin^2 x - 2\cos^2 x}$ biết $cotgx = 4$

★ *Hướng dẫn*

Giải giống bài 81 (sau khi biến đổi T theo $\sin^2 x$, $\cos^2 x$: chia tử và mẫu của T cho $\sin^2 x$).

Đáp số : $T = \dfrac{31}{14}$

Bài 83. Tính giá trị biểu thức : $T = \sqrt{tg10^0.tg20^0......tg80^0}$

★ *Hướng dẫn*

Ta có $A = \sqrt{(tg10^0.tg80^0).(tg20^0.tg70^0).(tg30^0.tg60^0).(tg40^0.tg50^0)}$

- Vì $tg80^0 = tg(90^0 - 10^0) = cotg10^0$ nên :

  $tg10^0.tg80^0 = tg10^0.cotg10^0 = 1$

- Tương tự $tg20^0.tg70^0 = 1$, ...

  Vậy $A = \sqrt{1.1..........1} = 1$

***Cần nhớ :** $tg\alpha.cotg\alpha = 1$*

Bài 84. Tính giá trị biểu thức : $T = \sqrt{tg15^0.tg30^0.tg45^0.tg60^0.tg75^0}$

★ *Hướng dẫn*

Giải giống bài 84 và chú ý $tg45^0 = 1$.

Đáp số : $T = 1$

Chuyên đề 5

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Kiến thức cơ bản

1) Góc của hai vectơ

Định nghĩa

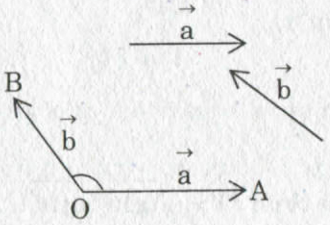
Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$.

Từ điểm O tùy ý, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Số đo của góc $\widehat{AOB}$ gọi là số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$,

kí hiệu : $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Chú ý :



- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ không phụ thuộc vị trí điểm O
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^0 \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^0 \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

2) Tích vô hướng của hai vectơ

a) Định nghĩa

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, là một số thực được xác định bởi công thức : $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}.\vec{b})$

b) Hệ quả 1 $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Hệ quả 2 Nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng nằm trên một trục thì :

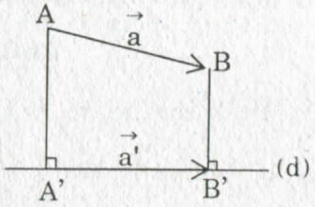
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{CD}$ ($\overline{AB}, \overline{CD}$ lần lượt là độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trên trục đó)

Hệ quả 3

Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó, nghĩa là $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

3) Công thức hình chiếu

a) Định nghĩa

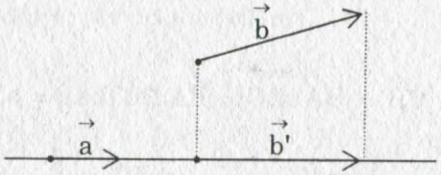


Cho vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và đường thẳng (d). Gọi A' và B' là hình chiếu vuông góc của A và B trên (d).

Vectơ $\vec{a'} = \overrightarrow{A'B'}$ gọi là hình chiếu của vectơ $\vec{a}$ trên (d).

b) Định lí

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng tích vô hướng của vectơ $\vec{a}$ và hình chiếu $\vec{b'}$ của vectơ $\vec{b}$ trên đường thẳng chứa vectơ $\vec{a}$.



$\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b'}$

4) Các tính chất cơ bản của tích vô hướng

Định lí

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và mọi số thực k, ta có :

a) Tính giao hoán : $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

b) Tính phân phối đối với phép cộng vectơ :

$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

c) Tính kết hợp đối với phép nhân một vectơ với một số thực :

$(k.\vec{a}).\vec{b} = k.(\vec{a}.\vec{b})$ $(k \in R)$

5) Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

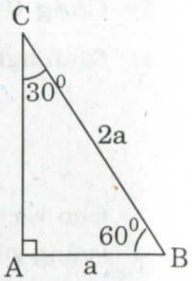
Định lí

Trong hệ tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và vectơ $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì :

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$$

Bài 85. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Dựa vào định nghĩa của tích vô hướng hãy tính $\overline{AB.AC}$, $\overline{AC.CB}$, $\overline{AB.CB}$

GIẢI



- **Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$**

Vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

- **Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$**

Ta có : $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ nên :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -CA.CB.\cos\hat{C}$ (1)

Vì tam giác ABC vuông tại A có AB = a và BC = 2a nên :

$\hat{C} = 30^0$ và CA = $\sqrt{3} \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -a\sqrt{3}.2a.\cos 30^0 = -3a^2$

- **Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$**

Tương tự, ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA.BC.\cos\hat{B} = a.2a.\frac{1}{2} = -a^2$

Cần nhớ : $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

Bài 86. Từ đẳng thức $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ có thể suy ra các đẳng thức sau đây hay không ?

a) $|\vec{a}|^2 = \sqrt{\vec{a}^2}$; b) $\vec{a} = \sqrt{|\vec{a}|^2} = |\vec{a}|$; c) $\vec{a} = \pm|\vec{a}|$

GIẢI

a) Đúng

b) $\vec{a} = \sqrt{|\vec{a}|^2}$ là sai ; $\sqrt{|\vec{a}|^2} = |\vec{a}|$ (đúng) ; $\vec{a} = |\vec{a}|$ (sai)

c) Sai

Bài 87. Đẳng thức $(\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2$ có thể đúng với mọi vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không ?.

Trong trường hợp nào đẳng thức đó đúng ?

GIẢI

Ta có : $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha$ với $\alpha = \left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$

$\Rightarrow \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2.\cos^2\alpha = \vec{a}^2.\vec{b}^2.\cos^2\alpha$

Vậy $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2$ đúng khi và chỉ khi $\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 1\\ \cos\alpha = -1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Vậy công thức $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2$ không thể đúng với mọi vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ mà chỉ đúng khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Bài 88. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng :

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (*)

Từ đó suy ra cách chứng minh định lí “Ba đường cao của một tam giác thì đồng quy tại một điểm”.

GIẢI

Ta có : $\left\{\begin{array}{ll}\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} & (1)\\ \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}.(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} & (2)\\ \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} & (3)\end{array}\right.$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta được :

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (*) (đpcm)

- Trong tam giác ABC, hai đường cao vẽ từ A và B cắt nhau tại H. Theo hệ thức (*) ta có :

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (Chọn H ≡ D) (2)

Mà $\left\{\begin{array}{l}HA \perp BC \text{ nên } \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0\\ HB \perp CA \text{ nên } \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0\end{array}\right.$

Vậy từ (2) , ta có : $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow HC \perp AB \Rightarrow$ HC là đường cao của tam giác ABC.

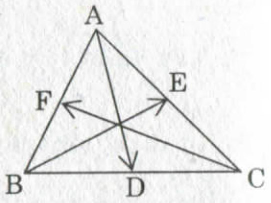
Vậy trong một tam giác, ba đường cao đồng quy tại một điểm (điểm này gọi là trực tâm của tam giác).

Bài 89. Cho tam giác ABC với ba đường trung tuyến AD, BE, CF.

Chứng minh rằng : $\vec{BC}.\vec{AD} + \vec{CA}.\vec{BE} + \vec{AB}.\vec{CF} = 0$

GIẢI

Đặt $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{c}$, ta có :



- $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$
- $\vec{BE} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BA}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$
- $\vec{CF} = \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{CA}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$

Do đó :

$$\vec{BC}.\vec{AD} + \vec{CA}.\vec{BE} + \vec{AB}.\vec{CF}$$

$$= \frac{1}{2}.\vec{a}.(\vec{c} - \vec{b}) + \frac{1}{2}.\vec{b}.(\vec{a} - \vec{c}) + \frac{1}{2}.\vec{c}.(\vec{b} - \vec{a})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{b} - \vec{c}.\vec{a}) = 0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 90. Cho hai điểm A, B cố định và một số dương k không đổi.

Tìm quỹ tích những điểm M sao cho $\vec{MA}.\vec{MB} = k$

GIẢI

Gọi I trung điểm của AB, ta có : $-\vec{IA} = \vec{IB}$ (1)

Mà $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$ và $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB}$

Nên $\vec{MA}.\vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA})(\vec{MI} + \vec{IB})$

$= (\vec{MI} + \vec{IA})(\vec{MI} - \vec{IA})$ (do (1))

$= MI^2 - IA^2$

Theo đề bài :

$\vec{MA}.\vec{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + IA^2$

$\Leftrightarrow$ $MI = \sqrt{k + IA^2}$ = không đổi

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{k + IA^2}$ $(k > 0)$

Bài 91. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R.

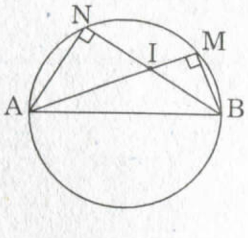
Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN.

a) **Chứng minh : $\vec{AM}.\vec{AI} = \vec{AB}.\vec{AI}$, $\vec{BN}.\vec{BI} = \vec{BA}.\vec{BI}$.**

b) **Tính $\vec{AM}.\vec{AI} + \vec{BN}.\vec{BI}$ theo R.**

GIẢI

a) • M ở trên đường tròn đường kính AB nên BM ⊥ AM ⇒ $\vec{AM}$ là hình chiếu của $\vec{AB}$ lên đường thẳng (AM).



Do đó : $\vec{AB}.\vec{AI} = \vec{AM}.\vec{AI}$

• Tương tự $\vec{BN}$ là hình chiếu của $\vec{BA}$ lên đường thẳng BI.

Do đó : $\vec{BA}.\vec{BI} = \vec{BN}.\vec{BI}$

b) Ta có $\vec{AM}.\vec{AI} + \vec{BN}.\vec{BI} = \vec{AB}.\vec{AI} + \vec{BA}.\vec{BI}$ (do câu a)

$= \vec{AB}.\vec{AI} + (-\vec{AB}).(-\vec{IB})$

$= \vec{AB}(\vec{AI} + \vec{IB}) = \vec{AB}^2 = 4R^2$

Vậy $\vec{AM}.\vec{AI} + \vec{BN}.\vec{BI} = 4R^2$

Bài 92. Trong hệ tọa độ Oxy, cho các điểm : A(1; 1), B(2; 4), C(10; – 2).

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

Tính tích vô hướng $\vec{BA}.\vec{BC}$ và tính cosB. Tương tự tính cosC.

GIẢI

- Ta có :

  $\vec{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A) = (10 - 1; -2 - 1) = (9; -3)$

  $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (2 - 1; 4 - 1) = (1; 3)$

  Suy ra $\vec{AB}.\vec{AC} = 9.1 + (-3).3 = 0$

  Vậy AB ⊥ AC hay tam giác ABC vuông tại A

- Ta có : $\vec{BA} = (-1; -3)$ và $\vec{BC} = (8; -6)$ nên :

  $\vec{BA}.\vec{BC} = (-1).8 + (-3)(-6) = -8 + 18 = 10$

- Tính cosB

  Ta có : $\vec{BA}.\vec{BC} = |\vec{BA}|.|\vec{BC}|.\cos B$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{\vec{BA}.\vec{BC}}{|\vec{BA}|.|\vec{BC}|} = \frac{10}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}.\sqrt{(8)^2 + (-6)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}.\sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Vậy $\cos B = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

- Tính cosC

Ta có : $\cos C = \dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|}$ mà $\overrightarrow{CA} = (-9; 3)$, $\overrightarrow{CB} = (-8; 6)$ nên :

$$\cos C = \frac{(-9)(-8) + 3.6}{\sqrt{(-9)^2 + (3)^2}\sqrt{(-8)^2 + 6^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Vậy $\cos C = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

Bài 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(– 1; 1), B(7; – 5). Tìm điểm M trên trục tung sao cho tam giác MAB vuông tại M.

★ ***Hướng dẫn***

- M(0; y) ∈ Oy
- Tam giác MAB vuông tại M $\Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

(Tính $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ rồi tính $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ theo y)

GIẢI

M ∈ trục tung Oy nên có tọa độ (0; y)

- Tam giác MAB vuông tại M $\Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MA} = (-1; 1 - y)\\ \overrightarrow{MB} = (7; -5 - y)\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -7 + (1 - y)(-5 - y)$

Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow -7 + (1 - y)(-5 - y) = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = -6 \vee y = 2$

Đáp số : M(0; – 6) V M(0; 2)

Bài 94. Trong mp(Oxy), cho hai điểm M(1; 4) và N(– 5; – 4). Tìm điểm I trên trục hoành sao cho I ở trên đường tròn đường kính MN.

★ ***Hướng dẫn***

- M(x; 0) ∈ Ox
- I ∈ đường tròn đường kính MN $\Leftrightarrow IM \perp IN$ sau đó tiếp tục giải giống bài 93.

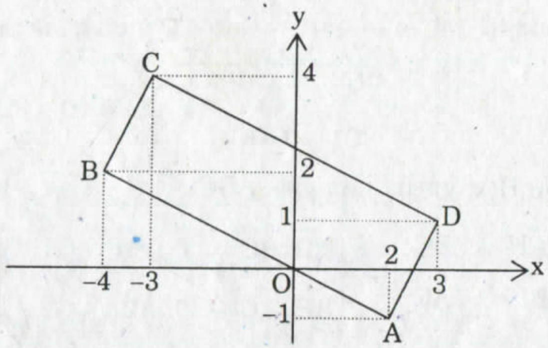
Đáp số : I(3; 0) V I(– 7; 0)

Bài 95. Trong mp(Oxy), cho bốn điểm A(2; – 1), B(– 4; 2), C(– 3; 4), D(3; 1). Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật. Tính chu vi và diện tích của ABCD.

★ ***Hướng dẫn***

Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$. So sánh $\overrightarrow{AB}$ với $\overrightarrow{DC}$ và tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

GIẢI



Ta có $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \overrightarrow{AB} = (-6; 3)\\ \bullet\ \overrightarrow{DC} = (-6; 3)\\ \bullet\ \overrightarrow{BC} = (1; 2)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} & (1)\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -6 + 6 = 0 & (2)\\ AB = 3\sqrt{5} \text{ và } BC = \sqrt{5} & (3)\end{array}\right.$

Từ (1) $\Rightarrow$ ABCD là hình bình hành

Từ (2) $\Rightarrow AB \perp BC$

Từ (3) $\Rightarrow AB \neq BC$

Vậy ABCD là hình chữ nhật. (đpcm)

- Chu vi (ABCD) = 2(AB + BC) = $2\left(3\sqrt{5} + \sqrt{5}\right) = 8\sqrt{5}$
- Diện tích (ABCD) = AB.BC = 15.

Bài 96. Trong mp(Oxy), cho I(– 3; 1), J(5; 0), H(6; 8), K(– 2; 9). Chứng minh IJHK là hình vuông. Tìm tọa độ tâm của hình vuông IJHK.

★ ***Hướng dẫn***

Giải giống bài 95.

Bài 97. Trong mp(Oxy), cho tam giác ABC : A(2; 2), B(– 5; 1), C(– 6; – 2). Tìm tọa độ trực tâm H, trọng tâm G của tam giác ABC.

★ Hướng dẫn

a) H(x; y) là trực tâm tam giác ABC, ta có :

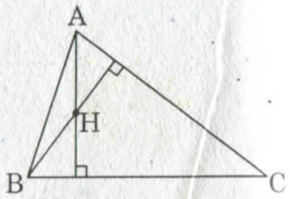
$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \text{............} \quad (1) \\ \text{............} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Từ hệ phương trình (1) và (2) ta sẽ được x và y.

b) Công thức G $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

GIẢI

a) Trực tâm H(x; y) của tam giác ABC



Ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \quad (1) \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \quad (2) \end{cases}$

- $\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (x - 2; y - 2) \\ \overrightarrow{BC} = (-1; -3) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = -(x - 2) - 3(y - 2) = -x - 3y + 8$

- $\begin{cases} \overrightarrow{BH} = (x + 5; y - 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-8; -4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = -8(x + 5) - 4(y - 1) = -8x - 4y - 36$

Vậy hệ $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y + 8 = 0 \\ -8x - 4y - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ 2x + y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 5 \end{cases}$

Đáp số : H(− 7; 5)

b) Trọng tâm G của tam giác ABC $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = -3 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Đáp số : G(− 3; $\frac{1}{3}$)

Bài 98. Trong mp(Oxy), cho tam giác ABC : A(4; 4), B(− 3; 3), C(− 4; 0).

Chứng minh rằng trực tâm H, trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác thì ở trên một đường thẳng (đường thẳng này gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC) và G chia đoạn HI theo tỉ số bằng bao nhiêu ?

★ Hướng dẫn

- Tìm tọa độ H và G : giống bài 97

Đáp số : H(− 5; 7) và G(− 1; $\frac{7}{3}$)

- Tìm tọa độ tâm I(x; y) của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC : IA = IB = IC

GIẢI

I(x; y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Ta có : IA = IB = IC $\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = (x + 3)^2 + (y - 3)^2 \\ (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = (x + 4)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 2y - 14 = 0 \\ 2x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y - 7 = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Đáp số: I(1; 0)

- Chứng minh G, H, I thẳng hàng

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{GH} = \left(-4; \dfrac{14}{3}\right) \\ \overrightarrow{GI} = \left(2; -\dfrac{7}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$

Vậy
- $\overrightarrow{GH}$ và $\overrightarrow{GI}$ cùng phương ⇒ G, H, I thẳng hàng (đpcm).
- G chia đoạn HI theo tỉ số k = − 2

Bài 99. Trong mp(Oxy), cho sáu điểm A(2; 0), B(1; $\sqrt{3}$), C(− 1; $\sqrt{3}$), D(− 2; 0), E(− 1; − $\sqrt{3}$), F(1; − $\sqrt{3}$).

Chứng minh rằng ABCDEF là lục giác đều.

★ Hướng dẫn

Tính độ dài sáu cạnh : AB, BC, CD, DE, EF, FA và tính độ dài OA, OB, OC, OD, OE, OF ta sẽ được kết quả.

Đáp số :

ABCDEF là lục giác đều có cạnh AB = BC = ... = 2 nội tiếp đường tròn tâm O(0; 0), bán kính R = 2.

Bài 100. Cho tam giác ABC (BC = a, CA = c)

a) Chứng minh $\vec{AB}.\vec{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$

b) Từ kết quả trên tính cosA theo a, b, c.

✶ *Hướng dẫn*

a) Dùng công thức $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left[\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2\right]$ (Chú ý : $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$)

b) Sử dụng kết quả câu a đồng thời sử dụng định nghĩa :

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC.\cos A$

GIẢI

a) Ta có $\vec{AB}.\vec{AC} = \frac{1}{2}\left[\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - (\vec{AB} - \vec{AC})^2\right]$

$$\text{Mà}\begin{cases}\vec{AB}^2 = AB^2 = c^2\\ \vec{AC}^2 = AC^2 = b^2\\ (\vec{AB} - \vec{AC})^2 = \vec{CB}^2 = CB^2 = a^2\end{cases}$$

Vậy $\vec{AB}.\vec{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$ (1)

b) Tính cosA

Theo định nghĩa ta có $\vec{AB}.\vec{AC} = |\vec{AB}|.|\vec{AC}|.\cos\left(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}\right)$ hay

$\vec{AB}.\vec{AC} = bc.\cos A$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có : $bc.\cos A = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$

$\Leftrightarrow \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Bài 101. Cho tam giác ABC (BC = a, CA = c).

Tính độ dài trung tuyến AM (M là trung điểm BC) theo a, b, c.

✶ *Hướng dẫn*

Dùng công thức $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ rồi tính AM^2 và đồng thời dùng kết quả bài 100.

$AM^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC})^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2\vec{AB}.\vec{AC})$

Đáp số : $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

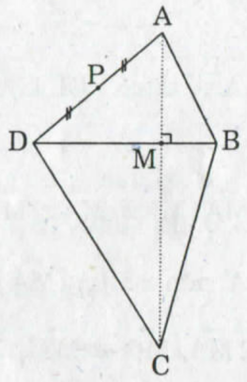
Bài 102. Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau và cắt nhau tại M. Gọi P là trung điểm cạnh AD.

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để BC ⊥ MP là $\vec{MA}.\vec{MC} = \vec{MB}.\vec{MD}$

✶ *Hướng dẫn*

- Tính $\vec{MP}$ theo $\vec{MA}$ và $\vec{MD}$, tính $\vec{BC}$ theo $\vec{MB}$, $\vec{MC}$ rồi tính $\vec{MP}.\vec{BC}$ (Chú ý : AC ⊥ BD)

GIẢI



Ta có • $2\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{MD}$ vì P là trung điểm AD

• $\vec{BC} = \vec{MC} - \vec{MB}$

Vậy $2\vec{MP}.\vec{BC} = (\vec{MA} + \vec{MD})(\vec{MC} - \vec{MB})$

$= \vec{MA}.\vec{MC} - \vec{MA}.\vec{MB} + \vec{MD}.\vec{MC} - \vec{MB}.\vec{MD}$

Vì AC ⊥ BD nên $\begin{cases}MA \perp MB\\ MC \perp MD\end{cases} \Rightarrow \vec{MA}.\vec{MB} = 0$ và $\vec{MC}.\vec{MD} = 0$

Vậy $2\vec{MP}.\vec{BC} = \vec{MA}.\vec{MC} - \vec{MB}.\vec{MD}$, do đó :

$MP \perp BC \Leftrightarrow \vec{MP}.\vec{BC} = 0 \Leftrightarrow \vec{MA}.\vec{MC} - \vec{MB}.\vec{MD} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MA}.\vec{MC} = \vec{MB}.\vec{MD}$ (đpcm)

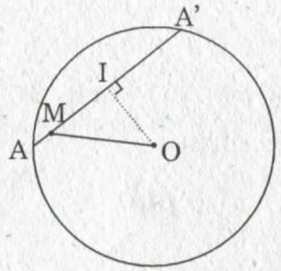
Bài 103. Cho AA' là dây cung của đường tròn tâm O và M là một điểm tùy ý trên đoạn thẳng AA'.

Chứng minh : $2\vec{MA}.\vec{MO} = MA(MA - MA')$

★ *Hướng dẫn*

Sử dụng công thức hình chiếu (xem mục 3b nói ở phần kiến thức cơ bản)

GIẢI



- Gọi I là trung điểm AA', ta có : OI ⊥ AA' ⇒ $\vec{MI}$ là hình chiếu của $\vec{MO}$ lên AA'.

  Vậy $2\vec{MA}.\vec{MO} = 2\vec{MA}.\vec{MI} = \vec{MA}.2\vec{MI}$ (1)

- Vì I là trung điểm AA' nên $2\vec{MI} = \vec{MA} + \vec{MA'}$ (2)

- Từ (1) và (2) ta có : $2\vec{MA}.\vec{MO} = \vec{MA}(\vec{MA} + \vec{MA'})$

⇔ $2\vec{MA}.\vec{MO} = = \vec{MA}^2 + \vec{MA}.\vec{MA'} = MA^2 + \vec{MA}.\vec{MA'}$

- Do $\vec{MA}$ và $\vec{MA'}$ ngược hướng nên $\vec{MA}.\vec{MA'} = -MA.MA'$

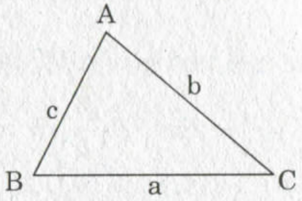
  Vậy $2\vec{MA}.\vec{MO} = \vec{MA}^2 - MA.MA' = MA(MA - MA')$ (đpcm)

Chuyên đề 6

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Kiến thức cơ bản

1) Định lí cosin trong tam giác



Với mọi tam giác ABC, ta có :

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ (1)

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$ (2)

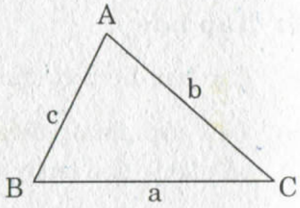
c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$ (3)

Hệ quả

Tam giác ABC vuông tại A nên cosA = 0, ta có định lí Pitago :

Tam giác ABC vuông tại A ⇔ $a^2 = b^2 + c^2$

2) Định lí sin trong tam giác



Với mọi tam giác ABC, ta có :

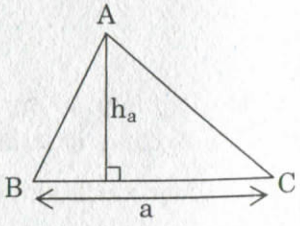
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)

3) Các công thức về diện tích tam giác

Kí hiệu :

h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C và S là diện tích tam giác ABC.



a) $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$

b) $S = \frac{1}{2}a.b.\sin C = \frac{1}{2}b.c.\sin A = \frac{1}{2}c.a.\sin B$

c) $S = \frac{a.b.c}{4R}$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

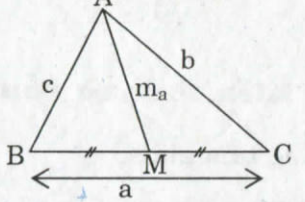
d) S = p.r, trong đó p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

e) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ trong đó p là nửa chu vi và a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC (Công thức Heron)

4) Công thức độ dài đường trung tuyến

Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài của trung tuyến kẻ từ A, B, C của tam giác ABC

Định lí



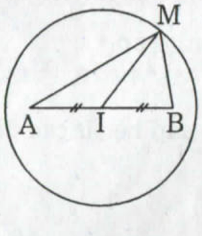
Với mọi tam giác ABC, ta có :

- $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$
- $c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \dfrac{b^2}{2} \Leftrightarrow m_b^2 = \dfrac{c^2 + a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$
- $a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \dfrac{c^2}{2} \Leftrightarrow m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$

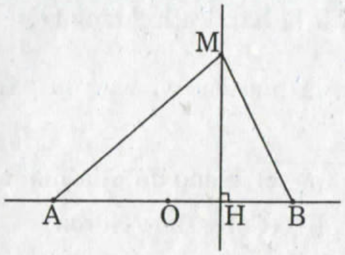
5) Tập hợp

Cho hai điểm cố định A và B

a) Tập hợp những điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k^2$ (trong đó k là một số dương cho trước) là đường tròn có tâm là trung điểm I của AB và bán kính $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ với $2k^2 > AB^2$



b) Tập hợp những điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$ (trong đó k là một số cho trước) là đường thẳng vuông góc với AB tại H, H là điểm được xác định bởi $\overline{OH} = \dfrac{k}{2\overline{AB}}$ (O là trung điểm của AB).



Bài 104. Tam giác ABC có b = 7, c = 5, cosA = $\frac{3}{5}$.

Tính h_a và bán kính đường tròn ngoại tiếp R.

GIẢI

- Ta có : $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$ (định lí)

  $= 49 + 25 - 70.\cos A = 74 - 70.\dfrac{3}{5}$

  $= 74 - 42 = 32$

  Vậy $a = 4\sqrt{2}$

- $\cos A = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$

  Ta có : $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.bc.\sin A = \dfrac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \dfrac{4}{5} = 14$ (đvdt)

  Mà $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{a} = \dfrac{2.14}{4\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

- Bán kính R

  Áp dụng định lí sin :

  $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Bài 105. Tam giác ABC có a = 7, b = 8, c = 6. Tính h_a và m_a.

GIẢI

- Tính h_a

  Theo công thức Heron

  $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

  $= \sqrt{\dfrac{21}{2}\left(\dfrac{21}{2} - 7\right)\left(\dfrac{21}{2} - 8\right)\left(\dfrac{21}{2} - 6\right)} = \dfrac{21\sqrt{15}}{4}$

  Mà $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}a.h_a$ nên $h_a = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{a} = \dfrac{2.21\sqrt{15}}{7.4} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

- Tính m_a

  Ta có $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{151}{4}$

  Vậy $m_a = \dfrac{\sqrt{151}}{2}$

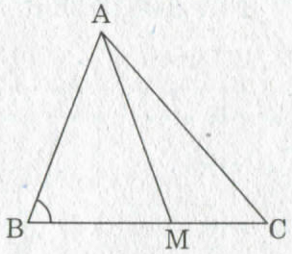
Bài 106. Tam giác ABC có AB = 8, AC = 9, BC = 10. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho BM = 7.

Tính độ dài đoạn thẳng AM.

✶ Hướng dẫn

- Dùng tam giác ABC để tính cosB (định lí cosin).
- Dùng tam giác ABM để tính AM (định lí cosin).

GIẢI



- Tam giác ABC có :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos B$ (định lí cosin).

$81 = 64 + 100 - 2.8.10.\cos B$

$\Rightarrow \cos B = \dfrac{83}{160}$

- Tam giác ABM cho :

$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos B$

$= 64 + 49 - 2.8.7.\dfrac{83}{160} = \dfrac{549}{10} = \dfrac{9 \times 61}{10} = \dfrac{9 \times 610}{100}$

Vậy $AM = \dfrac{3\sqrt{610}}{10}$

Bài 107. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có :

a) $a = b.\cos C + c.\cos B$

b) $\sin A = \sin B.\cos C + \sin C.\cos B$

GIẢI

a) Ta có : $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

và $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ab}$, do đó :

$$b.\cos C + c.\cos B = \frac{b\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{2ab} + \frac{c\left(a^2 + c^2 - b^2\right)}{2ac}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = a$$

Vậy $b.\cos C + c.\cos B = a$ (dpcm).

b) Theo câu a :

$b.\cos C + c.\cos B = a$ (1)

Mà $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A} = 2R$ nên :

$a = 2R.\sin A$; $b = 2R.\sin B$; $c = 2R.\sin C$

Thay vào (1), ta có :

$2R.\sin B.\cos C + 2R.\sin C.\cos B = 2R.\sin A$

$\Leftrightarrow \sin B.\cos C + \sin C.\cos B = \sin A$

Bài 108. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có :

$h_a = 2R.\sin B.\sin C$

GIẢI

Theo công thức diện tích tam giác, ta có :

$\dfrac{1}{2} a.h_a = \dfrac{1}{2} b.c.\sin A$

$\Leftrightarrow 2R.\sin A.h_a = 2R.\sin B.2R.\sin C.\sin A \quad \Leftrightarrow \quad h_a = 2R.\sin B.\sin C$

Bài 109. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

Nếu $b + c = 2a$ thì $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

GIẢI

Ta có : $a = \dfrac{2S}{h_a}$; $b = \dfrac{2S}{h_b}$; $c = \dfrac{2S}{h_c}$

Do đó : $b + c = 2a$ (gt) $\Leftrightarrow \dfrac{2S}{h_b} + \dfrac{2S}{h_c} = \dfrac{4S}{h_a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{2}{h_a}$

Bài 110. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

Nếu $bc = a^2$ thì $\sin B.\sin C = \sin^2 A$ và $h_b.hc = h_a^2$

GIẢI

Ta có : $a = 2R.\sin A$; $b = 2R.\sin B$; $c = 2R.\sin C$ (định lí sin).

Do đó • $bc = a^2 \Leftrightarrow 2R.\sin B.2R.\sin C = (2R.\sin A)^2$

$\Leftrightarrow \sin B.\sin C = \sin^2 A$

• $bc = a^2 \Leftrightarrow \dfrac{2S}{h_b} \times \dfrac{2S}{h_c} = \left(\dfrac{2S}{h_a}\right)^2 \Leftrightarrow h_a^2 = h_b.h_c$

Bài 111. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

★ *Hướng dẫn*

Dùng công thức trung tuyến.

GIẢI

Ta có :

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

Do đó : $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

Bài 112. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông ở A khi và chỉ khi :

$$m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$$

GIẢI

Ta có :

$$\begin{cases} m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{c^2 + a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{4a^2 + b^2 + c}{4} \\ 5m_a^2 = 5\left(\dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}\right) = \dfrac{5\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)}{4} \end{cases}$$

Vậy $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 5(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

$$\Leftrightarrow 9a^2 = 9b^2 + 9c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A.

Bài 113. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{AB}^2.\vec{AC}^2 - \left(\vec{AB}.\vec{AC}\right)^2}$$

Áp dụng : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho các điểm A = (1; – 2), B(– 2; 3) và (0; 4). Tính diện tích tam giác ABC.

GIẢI

Ta có : $\vec{AB}^2.\vec{AC}^2 - \left(\vec{AB}.\vec{AC}\right)^2 = AB^2.AC^2 - (AB.AC.\cos A)^2$

$$= AB^2.AC^2 - AB^2.AC^2.\cos^2 A = AB^2.AC^2(1 - \cos^2 A)$$

$$= AB^2.AC^2.\sin^2 A = 4(\frac{1}{2}.AB.AC.\sin A)^2 = 4\,S^2_{\Delta ABC}$$

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{AB}^2.\vec{AC}^2 - \left(\vec{AB}.\vec{AC}\right)^2}$ (1)

Áp dụng :

Ta có : $\vec{AB} = (-3; 5)$; $\vec{AC} = (-1; 6)$

Nên $\vec{AB}^2 = 34$; $\vec{AC}^2 = 37$; $\vec{AB}.\vec{AC} = 33$

Do (1), ta có : $S = \frac{1}{2}\sqrt{34.37 - 33^2} = \frac{13}{2}$

Bài 114. Cho tứ giác lồi ABCD, gọi α là góc hợp bởi hai đường chéo AC và BD.

Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức : $S = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

Nêu kết quả trong những trường hợp tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

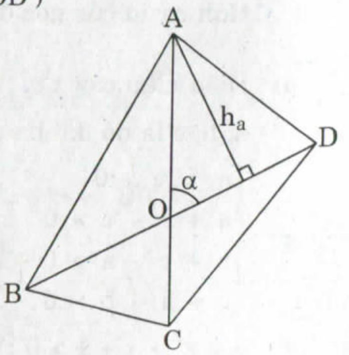
GIẢI

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì ABCD là tứ giác lồi nên O ở trên đoạn AC và trên đoạn BD.

Do đó : AC = AO + OC và BD = BO + OD (1)

Gọi h_a là độ dài đường cao phát xuất từ A của tam giác ABD thì h_a cũng là độ dài đường cao phát xuất từ A của tam giác ABO và tam giác AOD và ta có : $h_a = OA.\sin\alpha$ ($\alpha = \widehat{AOD}$)



Do đó : $dt(\Delta ABD) = \frac{1}{2}BD.OA.\sin\alpha$

Tương tự : $dt(\Delta BCD) = \frac{1}{2}BD.OC.\sin\alpha$

Mà $dt(ABCD) = dt(\Delta ABD) + dt(\Delta BCD)$

$\Leftrightarrow dt(ABCD) = \frac{1}{2}BD.\sin(OA + OC).\sin\alpha$

hay $dt(ABCD) = \frac{1}{2}BD.AC.\sin\alpha$ (đpcm)

- Nếu AC ⊥ BD thì $\alpha = 90^0 \Rightarrow \sin\alpha = 1$, lúc đó $dt(ABCD) = \frac{1}{2}AC.BD$

Bài 115. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có :

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

(a, b, c là độ dài ba cạnh và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp)

✶ ***Hướng dẫn***

- Định lí sin và cosin đối với góc A cho ta tính được cotgA = ...
- Tương tự ta cũng được cotgB = ..., cotgC = ...

GIẢI

- Ta có : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ và $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R}$

  Vậy $\text{cotg}A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \dfrac{2R}{a} = \dfrac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$

- Tương tự ta cũng có $\text{cotg}B = \dfrac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc}$

  và $\text{cotg}C = \dfrac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$

Vậy : $\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \dfrac{R(b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$

$$= \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 116. Cho $a = x^2 + x + 1$, $b = 2x + 1$, $c = x^2 - 1$.

Xác định x để a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC và trong trường hợp này chứng minh tam giác ABC có một góc có số đo bằng 120^0.

✶ ***Hướng dẫn***

- Điều kiện : a, b, c > 0 và a + b > c, ...
- Tìm góc lớn nhất của tam giác ABC bằng cách so sánh a, b, c rồi tính cosin của góc đó.

GIẢI

a) Điều kiện của x

a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b - c > 0 \\ b + c - a > 0 \\ c + a - b > 0 \end{cases}$$

- $a = x^2 + x + 1 > 0$: đúng với mọi $x \in R$
- $b = 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$
- $c = x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ V } x > 1$
- $a + b - c = 3x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
- $b + c - a = x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $c + a - b = 2x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2} \text{ V } x > 1$

Đáp số : $x > 1$

b) Chứng minh tam giác ABC có một góc bằng 120^0.

$$x > 1 \begin{cases} a - b = x^2 - x = x(x - 1) > 0 \\ a - c = x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} > \hat{B} \\ \hat{A} > \hat{C} \end{cases}$$

Vậy A là góc lớn nhất trong ba góc A, B, C

- Ta có $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{(2x+1)^2 + \left(x^2 - 1\right)^2 - \left(x^2 + x + 1\right)^2}{2(2x+1)\left(x^2 - 1\right)} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow A = 120^0$ (đpcm)

Bài 117. Trong mp(Oxy), cho tam giác ABC : A(1; 2), B(– 1; – 2), C(4; – 7).

Chứng minh $\widehat{BAC} = 45^0$.

✶ ***Hướng dẫn***

Dùng công thức : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

GIẢI

Ta có : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC.AB}$

- $AC^2 = 9 + 81 = 90 \Rightarrow AC = 3\sqrt{10}$
- $AB^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$
- $BC^2 = 25 + 25 = 50$

  Vậy $\cos A = \dfrac{90 + 20 - 50}{2.3\sqrt{10}.2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = 45^0$ (đpcm)

Bài 118. Trong mp(Oxy), cho A(0; 6), B(– 2; 2), C(4; – 2) và D(0; – 3).

Chứng minh AD là phân giác của $\widehat{BAC}$

✶ ***Hướng dẫn***

Dùng định lí cosin, tính $\cos\widehat{BAD}$ và $\cos\widehat{DAC}$

Đáp số : $\cos\widehat{BAD} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ và $\cos\widehat{DAC} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Chuyên đề 7

GIẢI TAM GIÁC – ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Kiến thức cơ bản

Trong việc giải tam giác, ta thường sử dụng tam giác ABC với ba góc là A, B, C và ba cạnh a = BC, b = CA, c = AB.

Có ba trường hợp :

1) Cho biết một cạnh kề hai góc, chẳng hạn a, B, C (gcg)

Ta phải tìm các yếu tố còn lại : b, c, A.

2) Cho biết hai cạnh và góc xen giữa hai cạnh, chẳng hạn : b, c, A (cgc)

Ta phải tìm các yếu tố còn lại là : a, B, C

3) Cho biết ba cạnh a, b, c (ccc). Ta phải tìm ba góc A, B, C .

Các định lí thường dùng để giải tam giác là định lí cosin, định lí sin, các công thức về diện tích của tam giác, ...

Bài 119. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có :

$$b^2 - c^2 = a(b.\cos C - c.\cos B)$$

GIẢI

Do định lí cosin ta có : $\left.\begin{array}{l} b^2 = c^2 + a^2 - 2ac.\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \end{array}\right\}$

$\Rightarrow b^2 - c^2 = c^2 - b^2 - 2a(c.\cos B - b.\cos C)$

$\Leftrightarrow b^2 - c^2 = a(b.\cos C - c.\cos B)$ (đpcm)

Bài 120. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có :

$$(b^2 - c^2)\cos A = a(c.\cos C - b.\cos B)$$

GIẢI

Ta có :

- $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow a.c.\cos C = \dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)c}{2b}$
- $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow a.b.\cos B = \dfrac{(c^2 + a^2 - b^2)b}{2c}$

Vậy : $ac.\cos C - ab.\cos B = \dfrac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2b} - \dfrac{c(c^2 + a^2 - b^2)}{2c}$

$$= \frac{a^2c^2 - c^4 - a^2b^2 + b^4}{2bc} \quad (1)$$

Mặt khác : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\Rightarrow (b^2 - c^2)\cos A = \dfrac{(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$

hay $(b^2 - c^2)\cos A = \dfrac{b^4 - c^4 - a^2b^2 + a^2c^2}{2bc}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta được : $(b^2 - c^2)\cos A = a(c.\cos C - b.\cos B)$ (đpcm)

Bài 121. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có :

$\sin A = \sin B.\cos C + \sin C.\cos B$

GIẢI

Áp dụng định lí sin, ta có :

$a = 2R.\sin A$; $b = 2R.\sin B$; $c = 2R.\sin C$

Theo bài 107 ta có : $a = b.\cos C + c.\cos B$ nên :

$2R.\sin A = 2R.\sin B.\cos C + 2R.\sin C.\cos B$

$\Leftrightarrow \sin A = \sin B.\cos C + \sin C.\cos B$ (đpcm)

Bài 122. Giải tam giác ABC biết : $c = 14$; $A = 60^0$; $B = 40^0$.

GIẢI

Ta có : $c = 14$ và $A = 60^0$, $B = 40^0$ (trường hợp góc – cạnh – góc).

Ta phải tìm C, a, b.

- Trong tam giác ABC, ta có $A + B + C = 180^0$ nên :

  $60^0 + 40^0 + C = 180^0 \Leftrightarrow C = 80^0$
- Bây giờ ta tính a, b.

  Theo định lí sin, ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow a = \frac{c.\sin A}{\sin C} = \frac{14.\sin 60^0}{\sin 80^0} \approx 12{,}31$$

Tương tự $b = \dfrac{c.\sin B}{\sin C} = \dfrac{14.\sin 40^0}{\sin 80^0} \approx 9{,}14$

Bài 123. Giải tam giác ABC biết : $b = 4{,}5$; $A = 30^0$; $B = 75^0$.

GIẢI

Ta có : $b = 4{,}5$ và $A = 30^0$, $C = 75^0$ (Trường hợp góc – cạnh – góc)

Hoàn toàn tương tự bài 122 a, ta có :

$B = 75^0$

$a \approx 2{,}3$

$c \approx 4{,}5$

Bài 124. Giải tam giác ABC biết : $c = 35$; $A = 40^0$; $C = 120^0$.

✶ *Hướng dẫn*

Ta có : $c = 35$ và $A = 40^0$, $C = 120^0$ (trường hợp góc – cạnh – góc)

Kết quả : $B = 20^0$

$a \approx 26$

$b \approx 13{,}82$

Bài 125. Giải tam giác ABC biết : $a = 137{,}5$; $A = 83^0$; $B = 57^0$.

✶ *Hướng dẫn*

Kết quả : $C = 40^0$

$b \approx 116{,}18$

$c \approx 89{,}04$

Bài 126. Giải tam giác ABC biết : $a = 6{,}3$; $b = 6{,}3$; $C = 54^0$

GIẢI

Ta có : $a = 6{,}3$; $b = 6{,}3$; $C = 54^0$ (cạnh – góc – cạnh)

- Vì $a = b$ nên tam giác ABC cân tại C

$$\Rightarrow A = B = \frac{180^0 - C}{2} = 63^0$$

- Bây giờ ta tính c.

Theo định lí cosin, ta có :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos C = 2a^2(1 - \cos C) \Rightarrow c \approx 5{,}72$$

Bài 127. Giải tam giác ABC biết : $b = 32$; $c = 45$; $A = 87^0$

GIẢI

- **Tính a.**

Theo định lí cosin, ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos A \Rightarrow a^2 = 2898{,}27 \Rightarrow a \approx 53{,}83$$

- **Bây giờ ta tính B và C.**

Theo định lí sin, ta có :

$$\sin B = \frac{b.\sin A}{a} = \frac{32.\sin 87^0}{54} \approx 0{,}5918 \Rightarrow B \approx 36^017'$$

Tương tự, $\sin C \approx 0{,}832 \Rightarrow C \approx 56^043'$

Bài 128. Giải tam giác ABC biết : $a = 7$; $b = 23$; $C = 130^0$

✶ *Hướng dẫn*

Hoàn toàn tương tự bài 127, ta có :

$c \approx 28$; $A \approx 11^02'$; $B \approx 38^058'$

Bài 129. Giải tam giác ABC biết : $a = 14$; $b = 10$; $C = 145^0$

GIẢI

Kết quả : $a \approx 23$; $B \approx 20^026'$; $C \approx 14^034'$

Bài 130. Giải tam giác ABC biết : $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$

GIẢI

Ta có : $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$ (cạnh – cạnh – cạnh)

Áp dụng định lí cosin, ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{528}{720} \approx 0{,}7333 \Rightarrow A \approx 42^050'$$

Tương tự, $C \approx 76^014'$ và $B = 60^056'$

Bài 131. Giải tam giác ABC biết : $a = 6$; $b = 7{,}3$; $c = 4{,}8$

GIẢI

Tương tự bài 130

Kết quả : $A = 54^052'$; $B = 84^016'$; $C = 40^052'$

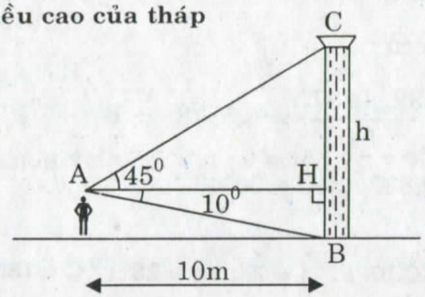
Bài 132. Giải tam giác ABC biết : a = 4 ; b = 5 ; c = 7

GIẢI

Kết quả : A = $34^0 3'$; B = $40^0 25'$; C = $101^0 30'$

Bài 133. Một người quan sát đứng cách một cái tháp 10m, nhìn thấy cái tháp dưới góc 55^0 và được phân tích như trên hình.

Tính chiều cao của tháp



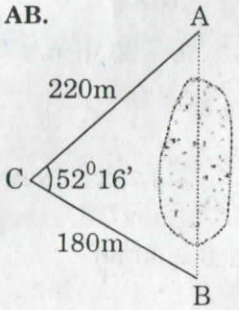
GIẢI

Theo hình vẽ : Gọi A là mắt người quan sát, BC là chiều cao của hình tháp và H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC, ta có :

$$BC = CH + BH = AH.tg45^0 + AH.tg10^0$$
$$= AH(tg45^0 + tg10^0)$$
$$= 10(1 + 0{,}1763) \approx 11{,}76 \text{ (m)}$$

Bài 134. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy (hình vẽ). Người ta xác định một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B. Các giả thiết được cho trên hình.

Tính khoảng cách AB.



GIẢI

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC, ta có :

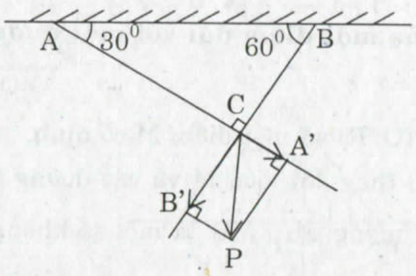
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos C \approx 32039{,}6$$

$\Rightarrow$ AB ≈ 179

Bài 135. Một vật nặng P = 100N được treo bằng hai thanh AC và BC tạo với trần nhà các góc 30^0 và 60^0 (hình vẽ).

Tính lực tác dụng lên mỗi thanh này.

GIẢI



Trọng lực $\overrightarrow{CP}$ được phân thành hai lực : $\overrightarrow{CA'}$ và $\overrightarrow{CB'}$ lần lượt nằm trên đường thẳng AC và BC.

Vì trong tam giác ABC có góc A = 30^0 và góc B = 60^0 nên góc $\widehat{A'CP} = 60^0$ và góc $\widehat{B'CP} = 30^0$.

$$\Rightarrow |\overrightarrow{CA'}| = |\vec{P}|\cos 60^0 = 100.\frac{1}{2} = 50(N)$$

$$\text{và } |\overrightarrow{CB'}| = |\vec{P}|\cos 30^0 = 100.\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,(N)$$

Vậy các lực tác dụng lên mỗi thanh AC và BC lần lượt là :

50(N) và $50\sqrt{3}$ (N)

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

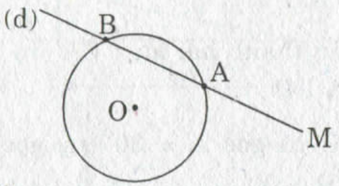
Kiến thức cơ bản

1) Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Định lí

Cho đường tròn (O; R) và một điểm M cố định.

Đường thẳng (d) thay đổi, qua M và cắt đường tròn tại hai điểm A và B thì tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ là một số không đổi.



Định nghĩa

Giá trị $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ không đổi nói trong định lí trên được gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn O, kí hiệu $\mathcal{P}_{M/(O)}$.

$$\mathcal{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$$

Chú ý :

a) • $\mathcal{P}_{M/(O)} > 0 \Leftrightarrow$ M ở ngoài đường tròn (O)

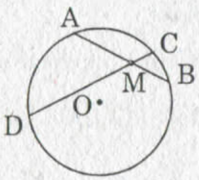
- $\mathcal{P}_{M/(O)} = 0 \Leftrightarrow M \in (O)$
- $\mathcal{P}_{M/(O)} < 0 \Leftrightarrow$ M ở trong đường tròn (O)

b) $\mathcal{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

c) Nếu M nằm ngoài đường tròn và MT là tiếp tuyến tại T của đường tròn thì $\mathcal{P}_{M/(O)} = MT^2$.

Hệ quả

Nếu qua M vẽ hai đường thẳng cắt đường tròn (O) lần lượt tại A, B và C, D thì MA.MB = MC.MD



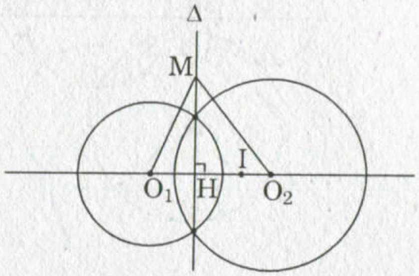
2) Trục đẳng phương của hai đường tròn

Định lí

Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$

Quỹ tích những điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đã cho là một đường thẳng vuông góc với O_1O_2 tại điểm H xác định bởi

$$\overline{IH} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2O_1O_2}$$

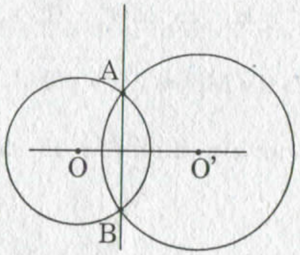


Định nghĩa

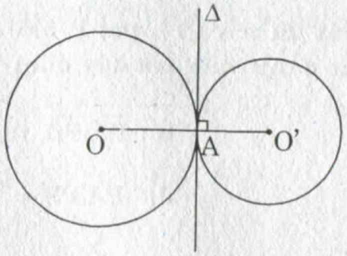
Đường thẳng Δ nói trên gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$

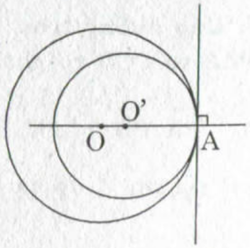
3) Cách dựng trục đẳng phương của hai đường tròn

a) Nếu hai đường tròn cắt nhau tại A và B thì trục đẳng phương của hai đường tròn chính là đường thẳng (AB).



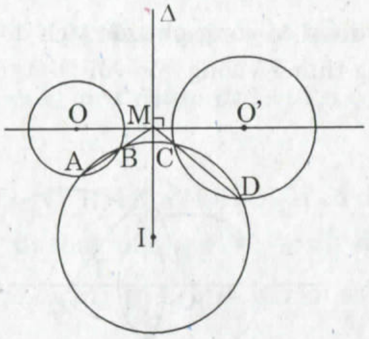
b) Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau tại A thì trục đẳng phương của hai đường tròn là tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn ấy.





c) Nếu hai đường tròn không có điểm chung thì trục đẳng phương của hai đường tròn được xác định như sau :

Dựng đường tròn phụ (I) cắt (O) tại A và B, cắt (O') tại C và D. AB và CD cắt nhau tại M. Đường thẳng Δ qua M và vuông góc với OO' chính là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O').



Bài 136. Cho đường tròn (O; R). Tìm quỹ tích những điểm M có phương tích đối với (O) bằng số không đổi.

GIẢI

Ta có : $\mathcal{P}_{M/(O)} = MO^2 - R^2$

Theo đề bài, $\mathcal{P}_{M/(O)} = k$ (k là hằng số)

Vậy $MO^2 - R^2 = k \Leftrightarrow MO^2 = R^2 + k$

- Nếu $R^2 + k > 0$ thì $MO = \sqrt{R^2 + k}$

  Vậy quỹ tích những điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt{R^2 + k}$

- Nếu $R^2 + k = 0$ thì quỹ tích của M là điểm O.
- Nếu $R^2 + k < 0$ thì quỹ tích của M là $\varnothing$.

Bài 137. Cho đường tròn (O; R) và một điểm P. Vẽ qua P hai cát tuyến PAB và PCD với đường tròn. Các đẳng thức sau đây đúng hay sai :

a) $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD}$ **b)** $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$

c) $PA.PB = PC.PD$ **d)** $PA.PB = PO^2 - R^2$

GIẢI

Tất cả đều đúng trừ câu d, câu d chỉ đúng khi PO > R

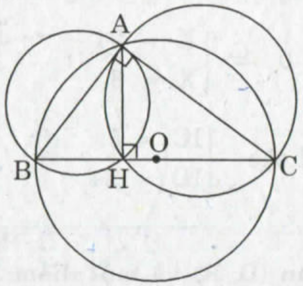
Bài 138. Tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b. Kẻ đường cao AH. Tìm phương tích của điểm H đối với các đường tròn có đường kính lần lượt là AB, AC, BC.

GIẢI

Kí hiệu [AB], [AC], [BC] lần lượt là đường tròn đường kính AB, AC, BC.

- $\mathcal{P}_{H/[AB]} = 0$ (vì $H \in [AB]$)

  Tương tự : $\mathcal{P}_{H/[AC]} = 0$



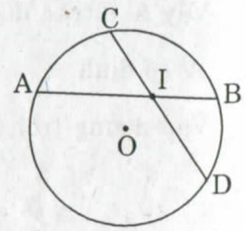
- $\mathcal{P}_{H/[BC]} = \overline{HB}.\overline{HC}$ mà $\overline{HB}.\overline{HC} = -HA^2$ (vì tam giác ABC vuông tại A và có đường cao AH) nên : $\mathcal{P}_{H/[BC]} = -HA^2$

  Cách khác, $\mathcal{P}_{H/[BC]} = HO^2 - R^2$ (O là tâm, R là bán kính của [BC])

  $= HO^2 - OA^2 = -(AO^2 - HO^2) = -HA^2$

Bài 139. Trong đường tròn (O), hai dây cung AB và CD cắt nhau ở I. Biết AI = 12, IB = 18, CI : ID = 3. Tính CD.

GIẢI



Ta có CD = CI + ID (1)

Mà IC.ID = IA.IB = 12.18 = 216 (2)

Mặt khác $\frac{IC}{ID} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow IC = \frac{3}{8}ID$ (3)

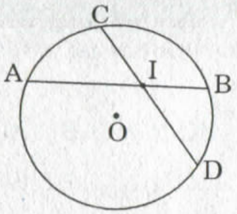
Thay IC ở (3) vào (2) ta được $\frac{3}{8}ID^2 = 216$

$\Leftrightarrow ID2 = \frac{8 \times 216}{3} = 576 \Leftrightarrow ID = 24$, lúc đó $IC = \frac{3}{8} \times 24 = 9$

Vậy CD = 9 + 24 = 33

Bài 140. Trong đường tròn (O), hai dây cung AB và CD cắt nhau ở I. Biết AI = 12, IB = 16, CD = 32. Tính CI và ID.

GIẢI



- Ta có IC + ID = CD $\Leftrightarrow$ IC + ID = 32
- Mặt khác, IC.ID = IA.IB = 12.16 = 192

Tóm lại, ta có : $\begin{cases} IC + ID = 32 \\ IC.ID = 192 \end{cases}$

Vậy IC và ID là nghiệm của phương trình bậc hai :

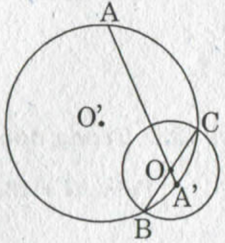
$$X^2 - 32X + 192 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 24 \\ X = 8 \end{array}\right.$$

Đáp số : $\begin{cases} IC = 24 \\ ID = 8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} IC = 8 \\ ID = 24 \end{cases}$

Bài 141. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A cố định không nằm trên đường tròn. Gọi BC là một đường kính thay đổi của (O; R).

Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định khác điểm A.

GIẢI



Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

AO cắt (O') tại A'.

Ta có : OA.OA' = OB.OC = R^2

$\Rightarrow$ $OA' = \dfrac{R^2}{OA}$ (không đổi)

Vậy A' ở trên đường thẳng cố định (OA) và độ dài OA' không đổi

$\Rightarrow$ A' cố định.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn qua điểm cố định A' (đpcm)

Bài 142. Cho đường tròn(O; R) và một điểm P cố định trong đường tròn. Hai dây cung thay đổi AB và CD luôn đi qua P và vuông góc với nhau.

Chứng minh rằng :

a) $AB^2 + CD^2$ **không đổi.**

b) $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ **không phụ thuộc vào vị trí của P.**

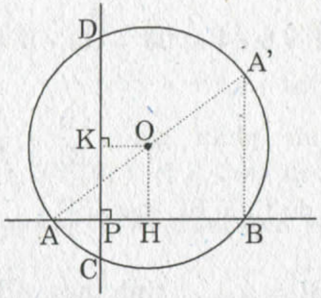
GIẢI

a) $AB^2 + CD^2$ ***không đổi***

Gọi AA' là đường kính của (O) và H là hình chiếu của O lên AB, ta có : $AB^2 = AA'^2 - A'B^2 = (2R)^2 - (2OH)^2 = 4R^2 - 4OH^2$ (1)

Tương tự ta cũng có : $CD^2 = 4R^2 - 4OK^2$ (2)

(K là hình chiếu của O lên CD)



Cộng (1) và (2), ta có :

$$AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4(OH^2 + OK^2)$$

$\Leftrightarrow$ $AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4OP^2$ (vì $OH^2 + OK^2 = OP^2$)

Vậy $AB^2 + CD^2$ = không đổi (vì P cố định)

b) Chứng minh $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ ***không phụ thuộc vào vị trí của P.***

Ta có :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{PB}^2 + 2\overrightarrow{PA}^2 - \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$

  hay $AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2\mathcal{P}_{P/(O)}$ (i)

- $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC}$ và tương tự như trên ta có :

$CD^2 = PC^2 + PD^2 - 2\mathcal{P}_{P/(O)}$ (j)

Cộng (i) và (j) ta được :

$$AB^2 + CD^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 - 4\mathcal{P}_{P/(O)}$$

Mà $\begin{cases} \bullet\ AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4OP^2 \text{ (chmt)} \\ \bullet\ \mathcal{P}_{P/(O)} = OP^2 - R^2 \end{cases}$

Vậy $8R^2 - 4OP^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4(\overrightarrow{OP} - R^2)$

$\Leftrightarrow$ $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4R^2$: không đổi (đpcm)

Chuyên đề 9

TỔNG HỢP CUỐI NĂM

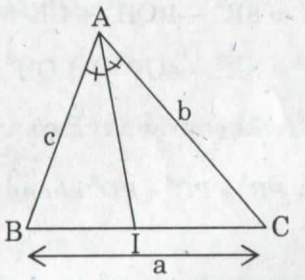
A) Vectơ và phương pháp tọa độ

Bài 143. Cho tam giác ABC (BC = a, CA = b, AB = c). Gọi I, J, K lần lượt là chân các đường phân giác kẻ từ A, B, C (I ∈ BC, J ∈ CA, K ∈ AB).

Chứng minh $a(b+c)\overrightarrow{AI} + b(c+a)\overrightarrow{BJ} + c(a+b)\overrightarrow{CK} = \vec{0}$

★ ***Hướng dẫn***

- Sử dụng công thức phân giác $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$ và chú ý $\frac{x}{y} = \frac{z}{c} = \frac{x+z}{y+c}$, từ đó tính $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{BC}$
- Tính $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} =$ .... tính theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$
- Tương tự tính $\overrightarrow{BJ}$ theo $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK}$ theo $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$



GIẢI

- Theo công thức phân giác ta có : $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

$$\Leftrightarrow \frac{IB}{c} = \frac{IC}{b} = \frac{IB + IC}{b+c} = \frac{BC}{b+c} \Leftrightarrow IB = \frac{c}{b+c}BC$$

Mà $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng nên :

$$\overrightarrow{IB} = -\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC} \quad \text{hay} \quad \overrightarrow{BI} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}$$

- Ta có : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \left(1 - \frac{c}{b+c}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

hay $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$.

$$\Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{AI} = b.\overrightarrow{AB} + c.\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow a(b+c)\overrightarrow{AI} = ab.\overrightarrow{AB} + ac.\overrightarrow{AC} \quad (1)$$

- Tương tự ta cũng có : $b(c+a)\overrightarrow{BJ} = ab.\overrightarrow{BA} + bc.\overrightarrow{BC} \quad (2)$

$$c(a+b)\overrightarrow{CK} = ca.\overrightarrow{CA} + cb.\overrightarrow{CB} \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) ta được : $a(b+c)\overrightarrow{AI} + b(c+a)\overrightarrow{BJ} + c(a+b)\overrightarrow{CK}$

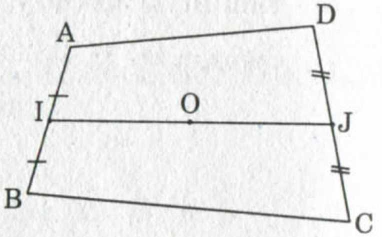
$$= ab(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + bc(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) + ca(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

Bài 144. Cho tứ giác ABCD, I và J theo thứ tự là trung điểm AB và CD.

Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$

★ ***Hướng dẫn***

Gọi O là trung điểm IJ, từ giả thiết : Tính OM^2 theo AB và CD



GIẢI

Gọi O là trung điểm IJ, ta có :

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

$$= (\overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

- Tương tự $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = MJ^2 - \frac{1}{4}CD^2$

Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = MI^2 + MJ^2 - \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2)$

$$= (\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OM})^2 - \frac{1}{4}\left(AB^2 + CD^2\right)$$

Ta có

$$(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OM})^2 = OI^2 + OJ^2 + 2OM^2 - 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ})$$

$$= \left(\frac{IJ}{2}\right)^2 + \left(\frac{IJ}{2}\right)^2 + 2OM^2 - 2\overrightarrow{OM}.\vec{0}$$

$$= \frac{IJ^2}{2} + 2OM^2$$

Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2 + 2OM^2 - \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2)$ (1)

- Theo giả thiết ta có : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có : $\frac{1}{2}IJ^2 + 2OM^2 - \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2) = \frac{1}{2}IJ^2$

⇔ $OM^2 = \frac{1}{8}(AB^2 + CD^2) \Leftrightarrow OM = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{AB^2 + CD^2}$ (không đổi)

Kết luận :

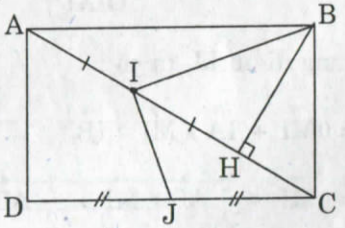
Tập hợp của M là đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{AB^2 + CD^2}$

Bài 145. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC và I, J lần lượt là trung điểm AH và CD.

Chứng minh BI ⊥ IJ

✶ *Hướng dẫn*

- Khai triển $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{HC}$
- Tính $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IJ}$ và chú ý ABCD là hình chữ nhật, BH ⊥ AC, ... từ đó chứng minh $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IJ} = 0$



GIẢI

- I là trung điểm AH nên $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}$ (1)
- Ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}\\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CJ}\end{cases}$

Vậy $2\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IH}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ})$

Mà $\begin{cases}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IH} = \vec{0} & \text{(Vì I là trung điểm của AH)}\\ \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0} & \text{(Vì J là trung điểm của CD)}\end{cases}$

Nên $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có :

$4\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC})$

⇔ $4\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}$

Vì $\begin{cases}BA \perp AD \text{ nên } \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = 0\\ BH \perp HC \text{ nên } \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}\end{cases}$

Nên $4\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$ (vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)

- Hình chiếu của $\overrightarrow{BC}$ lên đường thẳng (BH) là $\overrightarrow{BH}$ nên :

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH} = BH^2$

- Tương tự : Hình chiếu của $\overrightarrow{BA}$ lên đường thẳng (HC) là $\overrightarrow{HA}$ nên :

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC} = -HA.HC$ (vì $\overrightarrow{HA}$ và $\overrightarrow{HC}$ ngược hướng)

Vậy $4\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IJ} = -HA.HC + BH^2 = BH^2 - HA.HC$ (i)

- Do tam giác ABC vuông tại B và có đường cao BH nên :

$BH^2 = HA.HC \Leftrightarrow BH^2 - HA.HC = 0$ (j)

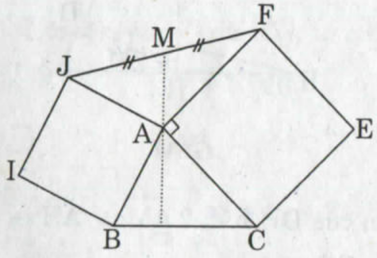
Từ (i) và (j), ta có : $4\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IJ} = 0 \Rightarrow BI \perp IJ$ (đpcm)

Bài 146. Cho tam giác ABC, vẽ các hình vuông ACEF và ABIJ (hình vẽ), M là trung điểm FJ. Chứng minh AM ⊥ BC.

✶ *Hướng dẫn*

- Khai triển $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$
- Chứng minh $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC} = 0$

(Chú ý AC ⊥ AF, AB ⊥ AJ và $\widehat{BAF} = \widehat{CAJ} = 90^0 + \widehat{BAC}$



GIẢI

- M là trung điểm FJ nên $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AJ}$
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Vậy $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AJ})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AB}$ (1)

- $AF \perp AC \Rightarrow AF.\vec{AC} = 0$ (2) và $AJ \perp AB \Rightarrow \vec{AJ}.\vec{AB} = 0$ (3)
- $\begin{cases} \vec{AF}.\vec{AB} = AF.AB.\cos\widehat{BAF} \\ \vec{AJ}.\vec{AC} = AJ.AC.\cos\widehat{CAF} \end{cases}$

mà $AF = AC$, $AB = AJ$, $\widehat{BAF} = \widehat{CAJ} = 90^0 + \widehat{A}$

nên $\vec{AF}.\vec{AB} = \vec{AJ}.\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AJ}.\vec{AC} - \vec{AF}.\vec{AB} = 0$ (4)

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta có :

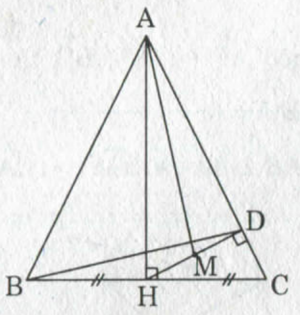
$2\vec{AM}.\vec{BC} = 0 \Leftrightarrow AM \perp BC$ (đpcm)

Bài 147. Cho tam giác ABC cân tại A có đường cao AH. Gọi D là hình chiếu vuông góc của H lên AC và M là trung điểm HD.

Chứng minh $AM \perp BD$

★ ***Hướng dẫn***

- Khai triển $\vec{AM}$ theo $\vec{AH}$ và $\vec{AD}$, $\vec{BD}$ theo $\vec{DH}$ và $\vec{DC}$
- Chứng minh $\vec{AM}.\vec{BD} = 0$ bằng cách chú ý $AD \perp DH$
- $\vec{AD}$ là hình chiếu của $\vec{AH}$ lên AD, ...



GIẢI

- M là trung điểm của DH nên $2\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{AD}$ (1)
- H là trung điểm BC nên

  $2\vec{DH} = \vec{DB} + \vec{DC} \Leftrightarrow \vec{DB} = 2\vec{DH} - \vec{DC}$ (2)
- Từ (1) và (2) ta có :

  $2\vec{AM}.\vec{DB} = (\vec{AH} + \vec{AD})(2\vec{DH} - \vec{DC})$

  $= 2\vec{AH}.\vec{DH} - \vec{AH}.\vec{DC} + 2\vec{AD}.\vec{DH} - \vec{AD}.\vec{DC}$ (3)
- $AD \perp DH \Rightarrow \vec{AD}.\vec{DH} = 0$ (i)

- $\vec{AD}$ và $\vec{DC}$ cùng hướng nên $\vec{AD}.\vec{DC} = AD.DC$ (j)
- Hình chiếu vuông góc của $\vec{AH}$ lên đường thẳng (DC) là $\vec{AD}$ nên :

  $\vec{AH}.\vec{DC} = \vec{AD}.\vec{DC} = AD.DC$ (k)
- Hình chiếu vuông góc của $\vec{AH}$ lên (DH) là $\vec{DH}$ nên :

  $\vec{AH}.\vec{DH} = \vec{DH}.\vec{DH} = DH^2$ (l)

  Thay (i), (j), (k), (l) vào (3) ta có :

  $2\vec{AM}.\vec{DB} = 2(DH^2 - AD.DC)$ (4)
- Vì tam giác AHC vuông tại H và có đường cao HD nên :

  $DH^2 = AD.DC$ hay $DH^2 - AD.DC = 0$ (5)

  Từ (4) và (5) $\Rightarrow 2\vec{AM}.\vec{DB} = 0 \Leftrightarrow AM \perp DB$ (đpcm)

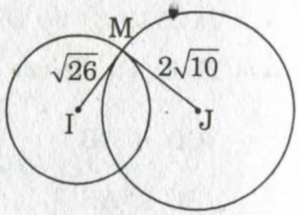
Bài 148. Trong mp(Oxy), cho đường tròn (C) có tâm I(– 1; 0) và bán kính $R = \sqrt{26}$, đường tròn (C') có tâm J(6; 7) và bán kính $R' = 2\sqrt{10}$.

Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C')

★ ***Hướng dẫn***

- Gọi M(a; b) là giao điểm của (C) và (C'), ta có :

  $\begin{cases} IM = \sqrt{26} \\ JM = 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = 26 \\ JM^2 = 40 \end{cases}$



- Giải hệ phương trình (1), (2)

GIẢI

Gọi M(a; b) là giao điểm của (C) và (C'), ta có :

$$\begin{cases} IM = R = \sqrt{26} \\ JM = R' = 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = 26 \\ JM^2 = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + b^2 = 26 \\ (a-6)^2 + (b-7)^2 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2a = 25 & (1) \\ a^2 + b^2 - 12a - 14b = -45 & (2) \end{cases}$$

- (1) trừ (2) ta có : $14a + 14b = 70 \Leftrightarrow a + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - a$ (3)
- Thay b ở (3) vào (1) ta có :

  $a^2 + (5-a)^2 + 2a = 25 \Leftrightarrow 2a^2 - 8a = 0$

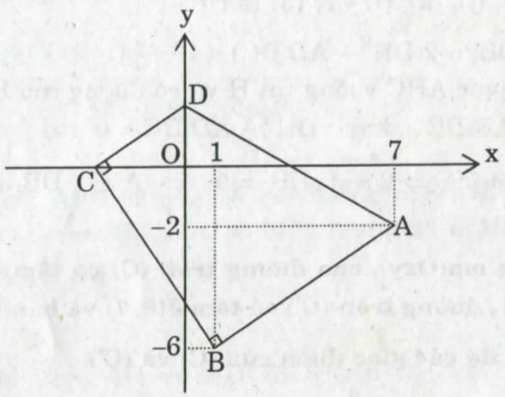
  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \Rightarrow b = 5 \\ a = 4 \Rightarrow b = 1 \end{array}\right.$ Vậy giao điểm của (C) và (C') là (0; 5) và (4; 1)

Bài 149. Trong mp(Oxy), cho hai điểm A(7; – 2), B(1; – 6).

Tìm điểm C trên trục hoành và điểm D trên trục tung sao cho ABCD là hình thang vuông tại B và C.

★ ***Hướng dẫn***

- C(x; 0) và D(0; y)
- Đề bài thỏa mãn khi CD // AB và BC ⊥ AB



GIẢI

- Ta có C(x; 0) ∈ Ox và D(0; y) ∈ Oy.
- Theo yêu cầu của đề bài, ta có :

$$\begin{cases} CD \parallel AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CD} \text{ và } \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } (1) \\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

- $\overrightarrow{CD} = (-x; y)$
- $\overrightarrow{AB} = (-6; -4)$
- $\overrightarrow{BC} = (x - 1; 6)$

$$\text{Vậy} \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-x}{-6} = \dfrac{y}{-4} \\ -6(x-1) - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3} = -\dfrac{y}{2} \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Đáp số : C(– 3; 0) và D(0; 2)

Bài 150. Trong mp(Oxy), cho tam giác ABC : A(3; – 1), B(6; 1), C(0; 3).

Tìm điểm M nằm trên đường thẳng y = 2x sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ ngắn nhất.

★ ***Hướng dẫn***

- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (G là trọng tâm tam giác ABC)

  Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ ngắn nhất ⇔ Độ dài MG ngắn nhất.

GIẢI

- $M(x_0; y_0) \in$ đường thẳng y = 2x nên $y_0 = 2x_0$

  Vậy $M(x_0; 2x_0)$
- Trọng tâm tam giác ABC là G(3; 1), ta có $\overrightarrow{MG} = (x_0 - 3; 2x_0 - 1)$

  Ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ nên :

  $d = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MG}\right| = 3\sqrt{(x_0 - 3)^2 + (2x_0 - 1)^2}$ hay

  $d = 3\sqrt{5\left(x_0^2 - 2x_0 + 2\right)} = 3\sqrt{5}\sqrt{(x_0 - 1)^2 + 1} \geq 3\sqrt{5}$

  Dấu = xảy ra ⇔ $x_0 = 1$

Đáp số : $\min\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\sqrt{5}$ khi M(1; 2)

Bài 151. (Câu hỏi trắc nghiệm)

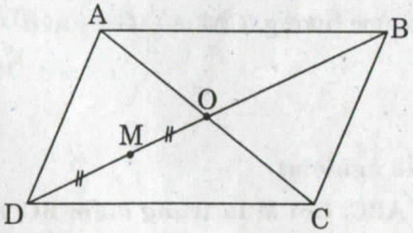
Cho hình bình hành ABCD có tâm đối xứng là O và M là trung điểm OD (hình vẽ). Câu nào sau đây đúng ?

a) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OA}$

b) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OB}$

c) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}$

d) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC}$



★ ***Hướng dẫn***

M là trung điểm OD nên $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AO}$

Mà $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ nên $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC}$

Đáp số : Câu d.

Bài 152. (Câu hỏi trắc nghiệm)

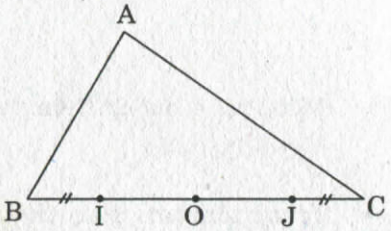
Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy hai điểm I, J sao cho BI = CJ (hình vẽ). O là trung điểm BC. Câu nào sau đây sai ?

a) $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}\right)$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$

d) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CJ}$



✶ *Hướng dẫn*

O cũng là trung điểm của IJ nên câu a, b đúng nên câu c cũng đúng.

Đáp số : Câu d

Bài 153. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho tam giác ABC. Có trọng tâm G và M là trung điểm BC.

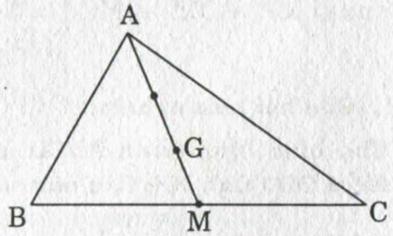
Câu nào sau đây đúng ?

a) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

d) $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{MG}$



✶ *Hướng dẫn*

$\overrightarrow{GM}$ và $\overrightarrow{GA}$ ngược hướng, $GM = \frac{1}{2}GA$ nên $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

Đáp số : Câu c

Bài 154. (Câu hỏi trắc nghiệm)

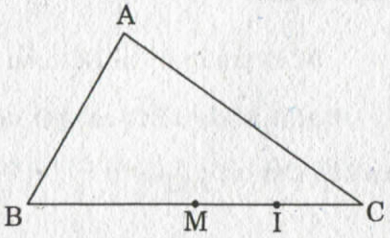
Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm MC, đặt $\vec{v} = 4\overrightarrow{AJ}$. Câu nào sau đây đúng ?

a) $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

b) $\vec{v} = 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

c) $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

d) $\vec{v} = 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$



✶ *Hướng dẫn*

I là trung điểm MC nên $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}$

⇔ $4\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AC}$ mà M là trung điểm BC nên :

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Vậy $4\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

Đáp số : Câu d.

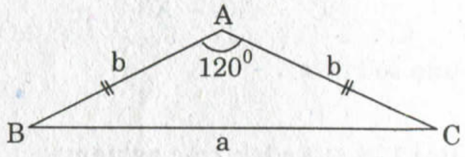
Bài 155. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho tam giác ABC cân tại A : AB = AC = b; BC = a và $\widehat{BAC} = 120^0$.

Tính giá trị của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$

a) $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{ab}{2}$

b) $-\frac{ab\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{ab}{2}$



✶ *Hướng dẫn*

- $\hat{B} = \hat{C} = 30^0$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA.BC.\cos\hat{B} = b.a.\cos30^0 = \frac{a.b\sqrt{3}}{2}$

Đáp số : Câu a.

Bài 156. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A và AB = AC = a.

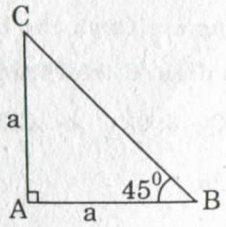
Tính T = $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ theo a

a) $T = a^2$

b) $T = -a^2$

c) $T = a^2\sqrt{2}$

d) $T = -a^2\sqrt{2}$



✶ *Hướng dẫn*

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -BA.BC.\cos45^0 = -a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$

Đáp số : Câu b

Bài 157. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho tam giác ABC, M là trung điểm BC và AB = c, AC = b.

Tính giá trị của $T = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$ theo b và c ?

a) $T = \frac{1}{2}(b^2 - c^2)$ c) $T = \frac{1}{2}(b^2 + c^2)$

b) $T = \frac{1}{2}(c^2 - b^2)$ d) $T = \frac{1}{2}(b^2 + c^2)$

*** *Hướng dẫn***

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(b^2 - c^2)$$

Đáp số : Câu a

Bài 158. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Trong mp(Oxy), cho vectơ $\vec{u} = (x_0 + 2; x_0)$. $|\vec{u}|$ ngắn nhất khi :

a) $x_0 = -2$ b) $x_0 = 0$ c) $x_0 = -1$ d) $x_0 = 1$

*** *Hướng dẫn***

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x_0 + 2)^2 + x_0^2} = \sqrt{2x_0^2 + 4x_0 + 4} = \sqrt{2(x_0 + 1)^2 + 2}$$

$$\Rightarrow |\vec{u}| \geq \sqrt{2} \Rightarrow \min|\vec{u}| = \sqrt{2} \text{ khi } x_0 = -1$$

Đáp số : Câu c

Bài 159. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Trong mp(Oxy), cho hai điểm : A(– 1; 4), B(1; 3).

Tìm điểm C trên trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại A.

a) C(– 3; 0) b) C(3; 0) c) C(– 2; 0) d) C(2; 0)

*** *Hướng dẫn***

C(x; 0) ∈ Ox, theo đề bài ta có : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$ với $\overrightarrow{AC} = (x + 1; -4)$

và $\overrightarrow{AB} = (2; -1)$

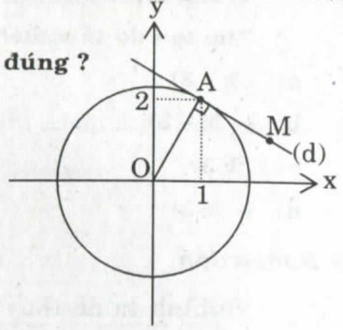
Vậy $2(x + 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Đáp số : Câu a

Bài 160. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Trong mp(Oxy), cho đường tròn (C) có tâm O(0; 0) và qua điểm A(1; 2), (d) là tiếp tuyến của (C) tại A.

Lấy điểm M(α; β) ∈ (d). Câu nào sau đây đúng ?



a) $\alpha - 2\beta - 5 = 0$

b) $\alpha - 2\beta + 5 = 0$

c) $\alpha + 2\beta - 5 = 0$

d) $\alpha + 2\beta + 5 = 0$

*** *Hướng dẫn***

Theo đề bài ta có : $OA \perp AM \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AM} = 0$

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1; 2) \\ \overrightarrow{AM} = (\alpha - 1; \beta - 2) \end{cases}$ nên $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AM} = 1(\alpha - 1) + 2(\beta - 2) = 0$

Đáp số : $\alpha + 2\beta - 5 = 0$ (Câu c)

Bài 161. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Trong mp(Oxy), cho A(– 1; 1), B(2; 4) và C(4; 1). Tính $\widehat{BAC}$?

a) 30^0 b) 45^0 c) 60^0 d) 90^0

*** *Hướng dẫn***

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$(AB = 3\sqrt{2}, AC = 5, BC = \sqrt{13})$

Đáp số : $\widehat{BAC} = 45^0$ (Câu b)

Bài 162. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Trong mp(Oxy), cho A(– 1; 3), B(0; 1) và C(m; m – 5).

Tính m để A, B, C thẳng hàng ?

a) m = – 2 b) m = 2 c) m = 1 d) m = – 1

*** *Hướng dẫn***

A, B, C thẳng hàng ⇔ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương

Với $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$ và $\overrightarrow{AB} = (m + 1; m - 8)$

Vậy $\frac{m + 1}{1} = \frac{m - 8}{-2} \Leftrightarrow m = 2$

Đáp số : Câu b

Bài 163. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Trong mp(Oxy), cho tam giác ABC : A(− 1; 2), B(− 1; 4) và C(− 5; 2).

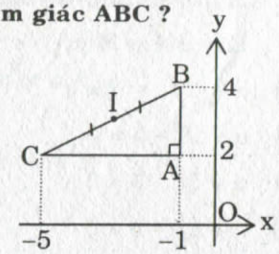
Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ?

a) (3; − 3)

b) (− 3; − 3)

c) (3; 3)

d) (− 3; 3)



✶ Hướng dẫn

Vẽ hình ta dễ thấy tam giác ABC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm BC, đó là I(− 3; 3)

Đáp số : Câu d.

Bài 164. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Trong mp(Oxy), cho A(0; 6), B và C là hai điểm lưu động trên trục hoành có hoành độ x_B, x_C thỏa mãn $x_B + x_C = 3$.

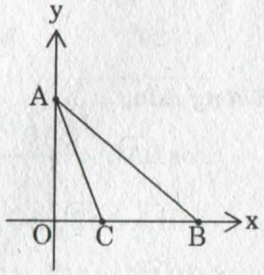
Câu nào sau đây đúng khi nói về trọng tâm G của tam giác ABC ?

a) **G có tọa độ (2; 2).**

b) **G có tọa độ (1; 2).**

c) **G lưu động vì B và C lưu động.**

d) **Chưa đủ yếu tố để xác định tọa độ của G.**



✶ Hướng dẫn

Ta có : A(0; 6), B(x_B; 0), C(x_C; 0)

$$\text{Vậy } G\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2 \end{cases}$$

Đáp số : G(1; 2) (Câu b)

Bài 165. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Trong mp(Oxy), Cho A(− 2; 0), B(− 1; $\sqrt{3}$).

Kết luận nào sau đây đúng khi nói về tam giác OAB ?

a) Cân **b) Vuông cân** **c) Đều** **d) Vuông**

✶ Hướng dẫn

Ta có OA = OB = AB = 2

Đáp số : Tam giác OAB là tam giác đều (câu c).

B) Lượng giác

Bài 166. Đơn giản biểu thức $T = \dfrac{\cos^2x - \sin^2x + \sin^4x}{\sin^2x - \cos^2x + \cos^4x}$

✶ Hướng dẫn

Dùng công thức $1 - \sin^2a = \cos^2a$, $1 - \cos^2a = \sin^2a$ để rút gọn tử và mẫu của T, sau đó dùng công thức $\dfrac{\cos a}{\sin a} = \text{cotga}$

GIẢI

$$\text{Ta có : } \frac{\cos^2x - \sin^2x\left(1 - \sin^2x\right)}{\sin^2x - \cos^2x\left(1 - \cos^2x\right)} = \frac{\cos^2x - \sin^2x.\cos^2x}{\sin^2x - \cos^2x.\sin^2x}$$

$$= \frac{\cos^2x\left(1 - \sin^2x\right)}{\sin^2x\left(1 - \cos^2x\right)}$$

$$= \frac{\cos^4x}{\sin^4x} = \text{cotg}^4x$$

Bài 167. Chứng minh biểu thức $A = (a\sin\alpha - b\text{co}\beta)^2 + (a\cos\beta + b\sin\alpha)^2$ không phụ thuộc vào α và β khi α và β bù nhau.

✶ Hướng dẫn

Khai triển biểu thức A và sử dụng công thức $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, ...

GIẢI

Ta có :

$A = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\beta - 2ab.\sin\alpha.\cos\beta + a^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\alpha + 2ab.\sin\alpha.\cos\beta$

$\Leftrightarrow A = (a^2 + b^2)\sin^2\alpha + (a^2 + b^2)\cos^2\beta$

$\Leftrightarrow A = (a^2 + b^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\beta)$

Vì α và β bù nhau nên $\alpha + \beta = 180^0 \Leftrightarrow \beta = 180^0 - \alpha$

Do đó $\sin\alpha = \sin\beta$

Vậy $A = (a^2 + b^2)(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = a^2 + b^2$ (đpcm)

Bài 168. Cho tga = t. Tính theo t giá trị biểu thức $T = \cos^4a - \sin^4a$.

✶ Hướng dẫn

$$\text{Dùng công thức } \begin{cases} a^4 - b^4 = \left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2\right) \\ \sin^2a + \cos^2a = 1 \quad \text{và} \quad \text{tga} = \dfrac{\sin a}{\cos a} \end{cases}$$

GIẢI

Ta có : $T = \sin^4 a - \cos^4 a = (\sin^2 a - \cos^2 a)(\sin^2 a + \cos^2 a)$

$\Leftrightarrow\ T = \sin^2 a - \cos^2 a = \dfrac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin^2 a + \cos^2 a}$ (vì $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$)

Chia tử và mẫu của T cho $\cos^2 a$ ($\cos a \neq 0$)

$$\text{Ta có : } T = \frac{\dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - 1}{\dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1} = \frac{\text{tg}^2 a - 1}{\text{tg}^2 a + 1} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

Đáp số : $T = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

Cách khác

Ta có : $T = (\sin^2 a - \cos^2 a)(\sin^2 a + \cos^2 a) = \sin^2 a - \cos^2 a$

$$= \cos^2 a\left(\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - 1\right) = \cos^2 a(\text{tg}^2 a - 1)$$

Ta lại có : $1 + \text{tg}^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a} \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 a = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 a}$

Vậy $\quad T = \dfrac{\text{tg}^2 a - 1}{\text{tg}^2 a + 1} = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

Bài 169. Chứng minh đẳng thức :

$$\sin^3 a(1 + \text{cotg}a) + \cos^3 a(1 + \text{tg}a) = \sin a + \cos a$$

★ *Hướng dẫn*

Khai triển vế trái và dùng công thức :

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$

GIẢI

Ta có :

$$\text{Vế trái} = \sin^3 a + \sin^3 a.\frac{\cos a}{\sin a} + \cos^3 a + \cos^3 a.\frac{\sin a}{\cos a}$$

$$= (\sin^3 a + \cos^3 a) + \sin^2 a.\cos a + \cos^2 a.\sin a$$

$$= (\sin a + \cos a)(\sin^2 a + \cos^2 a - \sin a.\cos a) + \sin a.\cos a(\sin a + \cos a)$$

$$= (\sin a + \cos a)(1 - \sin a.\cos a) + \sin a.\cos a(\sin a + \cos a)$$

$$= (\sin a + \cos a)(1 - \sin a.\cos a + \sin a.\cos a)$$

$= \sin a + \cos a =$ vế phải (đpcm)

Bài 170. Biết $\text{tg}^4 a + \text{cotg}^4 a = \dfrac{82}{9}$, tính $T = \text{tg}a + \text{cotg}a$ $(0^0 < a < 90^0)$

★ *Hướng dẫn*

Dùng công thức $\begin{cases} a^4 + b^4 = (a^2 + b^2) - 2a^2b^2 \\ a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \end{cases}$ và $\text{tg}a\,.\text{cotg}a = 1$

GIẢI

Ta có :

$$\text{tg}^4 a + \text{cotg}^4 a = (\text{tg}^2 a + \text{cotg}^2 a)^2 - 2\text{tg}^2 a.\text{cotg}^2 a$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{82}{9} = (\text{tg}^2 a + \text{cotg}^2 a)^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow\ (\text{tg}^2 a + \text{cotg}^2 a)^2 = \frac{82}{9} + 2 = \frac{100}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}^2 a + \text{cotg}^2 a = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow (\text{tg}a + \text{cotg}a)^2 - 2\text{tg}a.\text{cotg}a = \frac{10}{3} \quad \Leftrightarrow \quad (\text{tg}a + \text{cotg}a)^2 = \frac{10}{3} + 2$$

$$\Leftrightarrow\ (\text{tg}a + \text{cotg}a)^2 = \frac{16}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}a + \text{cotg}a = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Mà $0 < a < 90^0$ nên $\text{tg}a > 0$ và $\text{cotg}a > 0$

Vậy $\text{tg}a + \text{cotg}a = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Cần nhớ : *tga.cotga = 1*

Bài 171. Chứng minh rằng biểu thức sau đây có giá trị không phụ thuộc x

$$A = \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^2 - (\text{tg}x - \text{cotg}x)^2$$

★ *Hướng dẫn*

Dùng công thức $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$ và

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \text{cotg}^2 x \quad ; \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x \quad ; \quad \text{tg}x.\text{cotg}x = 1$$

GIẢI

Ta có :

$$A = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + 2 + \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2 - (\text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x - 2\text{tg}x.\text{cotg}x)$$

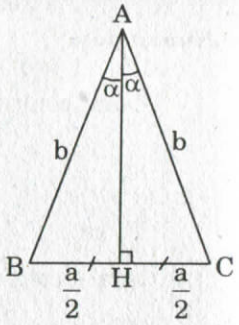
$$\Leftrightarrow\ A = 4 + (\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 + \text{cotg}^2 x + 1 + \text{tg}^2 x - (\text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x - 2)$$

$\Leftrightarrow\ A = 9$ (đpcm)

Bài 172. Cho tam giác ABC cân tại A : AB = AC = b, BC = a và $\widehat{BAC} = 2\alpha$

a) Tính sinα theo a và b.

b) Chứng minh : sin2α = 2sinα.cosα .



★ ***Hướng dẫn***

a) Dùng tam giác ABH vuông tại H.

b) Sử dụng định lí sin đối với tam giác ABC và chú ý $B = 90^0 - \alpha$

GIẢI

Vẽ đường cao AH $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \alpha \\ HB = HC = \dfrac{a}{2} \end{cases}$

a) Tam giác BHC vuông tại H nên $\sin\alpha = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{a}{2b}$

b) Định lí sin áp dụng vào tam giác ABC ta có :

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin\left(90^0 - \alpha\right)} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \dfrac{a}{b}\cos\alpha$ mà $\sin\alpha = \dfrac{a}{2b}$ (câu a) nên $\dfrac{a}{b} = 2\sin\alpha$

Vậy sin2α = 2sinα.cosα (đpcm)

Bài 173. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho $90^0 < a < 180^0$ và $\sin a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, tính cosa ?

a) $\cos a = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos a = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\cos a = -\dfrac{\sqrt{13}}{4}$

d) $\cos a = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$

★ ***Hướng dẫn***

$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a =$ ....

$90^0 < a < 180^0$ nên cosa < 0 **Đáp số :** $\cos a = -\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ (câu c)

Bài 174. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Biết $90^0 < a < 180^0$ và $\sin a.\cos a = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Tính T = sina − cosa ?

a) $T = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$

b) $T = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$

c) $T = \dfrac{\sqrt{13} - 1}{2}$

d) $T = -\left(\dfrac{\sqrt{13} + 1}{2}\right)$

★ ***Hướng dẫn***

Tính $T^2 = (\sin a - \cos a) =$ ....

$90^0 < a < 180^0 \Rightarrow \sin a > 0, \cos a < 0$ nên $T > 0$

Đáp số : $T = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$ (câu a)

Chú ý : $T^2 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{4} = \left(\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2$

Bài 175. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Biết tga + cotga = 3. Tính $T = tg^3a + cotg^3a$?

a) T = 12 b) T = 16 c) T = 18 d) T = 20

★ ***Hướng dẫn***

Dùng công thức $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$

$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$

Chú ý : tga.cotga = 1

Đáp số : $tg^3a + cotg^3a = 18$ (câu c)

Bài 176. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tính giá trị của $T = \dfrac{2\sin 40^0 - \cos 160^0}{\cos 20^0 + 2\sin 140^0}$

a) T = 1 b) T = − 1 c) T = 2 d) T = − 2

★ ***Hướng dẫn***

- $\sin 40^0 = \sin(180^0 - 40^0) = \sin 140^0$
- $\cos 160^0 = \cos(180^0 - 20^0) = -\cos 20^0$

Đáp số : T = 1 (câu a)

Bài 177. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tam giác ABC vuông tại A và I là giao điểm hai phân giác trong vẽ từ B và C.

Tính sin $\widehat{BIC}$?

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

★ *Hướng dẫn*

$$\widehat{BIC} = 180^0 - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} \quad \text{(tam giác BIC)}$$

$$= 180^0 - \left(\frac{B + C}{2}\right) = 180^0 - 45^0$$

Vậy $\sin\widehat{BIC} = \sin(180^0 - 45^0) = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Đáp số : Câu a

Bài 178. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Biết $90^0 < \alpha < 180^0$, rút gọn biểu thức :

$T = |\cos\alpha - \sin\alpha| + |\cos\alpha|$

a) $T = 2\cos\alpha$ **c)** $T = 2\cos\alpha - \sin\alpha$

b) $T = 2\sin\alpha$ **d)** $T = \sin\alpha - 2\cos\alpha$

★ *Hướng dẫn*

$$90^0 < \alpha < 180^0 \text{ nên } \cos\alpha < 0, \sin\alpha > 0 \Rightarrow \begin{cases} |\cos\alpha| = -\cos\alpha \\ \cos\alpha - \sin\alpha < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\cos\alpha - \sin\alpha| = \sin\alpha - \cos\alpha$$

Đáp số : $T = \sin\alpha - 2\cos\alpha$ (câu d)

Bài 179. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tính giá trị của $A = \frac{3\sin x}{\sin x + \cos x}$ biết tgx = 2

a) A = 3 **b)** A = 2 **c)** $A = \frac{3}{2}$ **d)** $A = \frac{2}{3}$

★ *Hướng dẫn*

Chia tử và mẫu của A cho cosx , ta có :

$$A = \frac{3\text{tg}x}{\text{tg}x + 1} = \frac{3 \times 2}{2 + 1} = 2$$

Đáp số : Câu b.

Bài 180. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tính cosx biết $\text{cotg}x = -\frac{1}{3}$ $(0^0 < x < 180^0)$

a) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ **c)** $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ **d)** $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

★ *Hướng dẫn*

Dùng công thức $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x = 1 + (-3)^2 = 10$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ mà tgx < 0 nên cosx < 0

Vậy $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

(Chú ý : $\text{tg}x = \frac{1}{\cot gx} = -3$)

Đáp số : Câu b

C) Hệ thức lượng trong tam giác

Hệ thức lượng trong đường tròn

Bài 181. Cho tam giác ABC, gọi M và N lần lượt là trung điểm AC và AB.

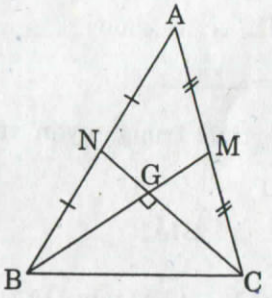
Chứng minh : BM ⊥ CN ⇔ cotgA = 2(cotgB + cotgC)

★ *Hướng dẫn*

- **Bước 1 :** Dùng định lí Pitago đối với tam giác GBC (hình vẽ), sau đó sử dụng công thức tính độ dài trung tuyến và chú ý

$$GB = \frac{2}{3}BM \ ; \quad GC = \frac{2}{3}CN$$

- **Bước 2 :** Dùng định lí sin và cosin để tính cotgA, cotgB, cotgC theo R và a, b, c.



GIẢI

- a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC (BC = a, CA = b, AB = c) và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- **Bước 1 :**

BM ⊥ CN ⇔ Tam giác GBC vuông tại G (G là trọng tâm tam giác ABC)

$$\Leftrightarrow BC^2 = BG^2 + CG^2 = \frac{4}{9}(BM^2 + CN^2)$$

$$\Leftrightarrow\ a^2 = \frac{4}{9}\left(m_b^2 + m_c^2\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right)$$

$\Leftrightarrow\ 5a^2 = b^2 + c^2$ (1)

- **Bước 2 :**
- Ta có : $\cot gA = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \times \dfrac{2R}{a} = \dfrac{R\left(b^2+c^2-a^2\right)}{abc}$
- Tương tự : $\cot gB = \dfrac{R\left(a^2+c^2-b^2\right)}{abc}$ và $\cot gC = \dfrac{R\left(a^2+b^2-c^2\right)}{abc}$

Vậy cotgA = 2(cotgB + cotgC)

$$\Leftrightarrow\ \frac{R\left(b^2+c^2-a^2\right)}{abc} = 2\left[\frac{R\left(a^2+c^2-b^2\right)}{abc} + \frac{R\left(a^2+b^2-c^2\right)}{abc}\right]$$

$\Leftrightarrow\ 5a^2 = b^2 + c^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ BM $\perp$ CN $\Leftrightarrow$ cotg A = 2(cotgB + cotgC) (đpcm).

Bài 182. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp là O. Chứng minh : $R^2 - OG^2 = \dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9}$

★ ***Hướng dẫn***

- **Bước 1 :** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GO}$ $\Rightarrow OA^2 =$ ...., tương tự $OB^2 =$ .... và OC^2 ....

  Vậy $OA^2 + OB^2 + OC^2 =$ ....
- **Bước 2 :** Sử dụng công thức trung tuyến và chú ý OA = OB = OC, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

GIẢI

- **Bước 1 :** Ta có $\overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GO})$ nên $OA^2 = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GO})^2$

hay $OA^2 = GA^2 + GO^2 - 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GO}$ (1)

Tương tự $OB^2 = GB^2 + GO^2 - 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GO}$ (2)

$OC^2 = GC^2 + GO^2 - 2\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GO}$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) ta có :

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GO^2 - 2\overrightarrow{GO}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

- **Bước 2 :** Ta có :
- $OA = OB = OC = R$
- $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right)$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

Vậy $3R^2 = 3OG^2 + \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$

$\Leftrightarrow\ R^2 - d^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$ (đpcm)

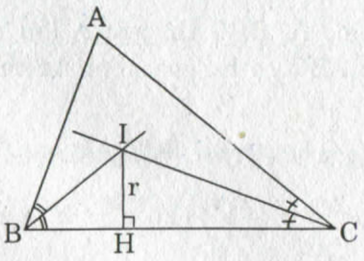
Bài 183. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có :

$$(a-b)\cot g\frac{C}{2} + (b-c)\cot g\frac{A}{2} + (c-a)\cot g\frac{B}{2} = 0$$

★ ***Hướng dẫn***

- I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (I là giao điểm các phân giác trong của $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$)
- Vẽ IH $\perp$ BC, H $\in$ (BC), IH = r (r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC)
- Sử dụng các tam giác vuông BIH, CIH, ...

GIẢI



- Tam giác BIH và tam giác CIH vuông tại H, ta có :

$$\begin{cases} \cot g\dfrac{B}{2} = \dfrac{BH}{IH} = \dfrac{BH}{r} \\ \cot g\dfrac{C}{2} = \dfrac{CH}{IH} = \dfrac{CH}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BH = r.\cot g\dfrac{B}{2} \\ CH = r.\cot g\dfrac{C}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $BH + CH = r(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2})$ hay $a = r(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2})$

- Tương tự ta cũng có $b = r(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{C}{2})$

Vậy $a - b = r(\cot g\frac{B}{2} - \cot g\frac{A}{2})$

$\Rightarrow$ $(a - b)\cot g\frac{C}{2} = r(\cot g\frac{B}{2} - \cot g\frac{A}{2})\cot g\frac{C}{2}$ (1)

- Tương tự $\begin{cases} (b-c)\cot g\frac{A}{2} = r\left(\cot g\frac{C}{2} - \cot g\frac{B}{2}\right)\cot g\frac{A}{2} & (2) \\ (c-a)\cot g\frac{B}{2} = r\left(\cot g\frac{A}{2} - \cot g\frac{C}{2}\right)\cot g\frac{B}{2} & (3) \end{cases}$

Cộng (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 184. Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn.

★ ***Hướng dẫn***

Từ $a^4 = b^4 + c^4$ suy ra A > B và A > C, sau đó chứng minh cosA > 0 bằng cách dùng công thức $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

GIẢI

- Từ $a^4 = b^4 + c^4 \Rightarrow \begin{cases} a^4 > b^4 \\ a^4 > c^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A > B \\ A > C \end{cases}$

Vậy trong ba góc A, B, C thì góc A lớn nhất, do đó muốn chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn ta chỉ cần chứng minh góc A nhọn là đủ.

A nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 > a^2$

- Ta có $a^4 = b^4 + c^4 < a^4 + b^4 + 2b^2c^2 = (b^2 + c^2)^2$

$\Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Rightarrow \cos A > 0$

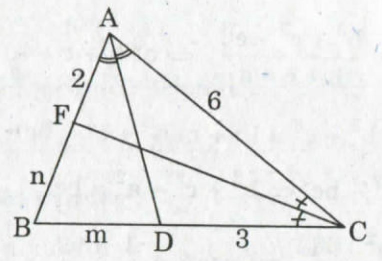
$\Rightarrow$ A là góc nhọn (đpcm)

Bài 185. Cho tam giác ABC. Vẽ các phân giác trong AD và CF (D ∈ BC và F ∈ AB).

Tính độ dài DF biết CD = 3, AF = 2 và AC = 6 (đơn vị cm)

★ ***Hướng dẫn***

- Dùng công thức phân giác để tính BD và BF từ đó suy ra AB và BC.
- Dùng định lí cosin (đối với tam giác ABC) để tính góc B sau đó dùng tam giác BDF để tính DF.



GIẢI

◆ Đặt BD = m và BF = n

◆ Theo công thức phân giác, ta có :

- $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{m}{3} = \frac{n+2}{6}$
- $\frac{FB}{FA} = \frac{CB}{CA} \Leftrightarrow \frac{n}{2} = \frac{m+3}{6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n = 2 \\ m - 3n = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{5} = BD \\ n = \frac{8}{5} = BF \end{cases}$ lúc đó $\begin{cases} AB = AF + BF = \frac{18}{5} \\ BC = BD + DC = \frac{24}{5} \end{cases}$

- Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có :

$$\cos B = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA.BC} = \frac{\left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 - 6^2}{2\left(\frac{18}{5}\right)\left(\frac{24}{5}\right)} = 0$$

$\Rightarrow \hat{B} = 90^0 \Rightarrow$ Tam giác BDF vuông tại B

$\Rightarrow DF^2 = BD^2 + BF^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{145}{25}$

$\Rightarrow DF = \frac{\sqrt{145}}{5}$

Bài 186. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là BC = a, CA = b, AB = c thỏa mãn hệ thức $a^2 = \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a}$. Tính số đo của $\hat{A}$?

★ ***Hướng dẫn***

- Tính $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ bằng cách sử dụng hệ thức đã cho.

GIẢI

Ta có : $a^2 = \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} \Leftrightarrow a^2(b + c - a) = b^3 + c^3 - a^3$

$\Leftrightarrow a^2(b + c) = b^3 + c^3 = (b + c)(b^2 + c^2 - bc)$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos A = \dfrac{1}{2}$

Vậy $A = 60^0$.

Bài 187. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\begin{cases} \dfrac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 & (1) \\ a = 2b.\cos C & (2) \end{cases}$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

★ ***Hướng dẫn***

- Từ (1), chứng minh $B = 60^0$ (giống bài 186)
- Từ (2) và $B = 60^0$, chứng minh b = c (dùng định lí cosin : $c^2 = \ldots\ldots$) (3)

Theo giả thiết ta có : $a = 2b.\cos C \Leftrightarrow \cos C = \dfrac{a}{2b}$ (4)

Thay cosC ở (4) vào (3) ta có : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\left(\dfrac{a}{2b}\right)$

$\Leftrightarrow c^2 = b^2 \Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân tại A.

Đáp số : Tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 188. Đại học ngoại ngữ Hà Nội – 2000

Các đường trung tuyến AM, BE, CF của tam giác ABC tương ứng bằng 5m, 4m, 3m.

Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

★ ***Hướng dẫn***

Dùng công thức trung tuyến $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2}$ hay

$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4m_a^2$ để lập hệ phương trình ba ẩn là a^2, b^2, c^2.

GIẢI

Theo công thức trung tuyến :

$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4m_a^2$, ta có :

- $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4(5)^2 = 100$ (1)
- $2c^2 + 2a^2 - b^2 = 4m_b^2 = 4(4)^2 = 64$ (2)
- $2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4m_c^2 = 4(3)^2 = 36$ (3)

Giải hệ (1), (2) và (3) ta được :

$a^2 = \dfrac{100}{9}$, $b^2 = \dfrac{208}{9}$, $c^2 = \dfrac{292}{9}$

Đáp số : $a = \dfrac{10}{3}$, $b = \dfrac{4\sqrt{13}}{3}$, $c = \dfrac{2\sqrt{73}}{3}$

Bài 189. Tính độ dài các cạnh a, b, c của tam giác ABC theo các góc A, B, C và chu vi 2p của tam giác ABC.

★ ***Hướng dẫn***

Theo định lí sin, ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Vậy

- $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C} \Leftrightarrow a = \dfrac{2p.\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}$
- $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C} \Leftrightarrow b = \dfrac{2p.\sin B}{\sin A + \sin B + \sin C}$
- $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C} \Leftrightarrow c = \dfrac{2p.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$

Bài 190. Cho tam giác ABC (BC = a, CA = b, AB = c).

Chứng minh rằng $b + c = 2a \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A$

★ ***Hướng dẫn***

Theo định lí sin ta có :

$a = 2R.\sin A$, $b = 2R.\sin B$, $c = 2R.\sin C$

Vậy $b + c = 2a \Leftrightarrow 2R.\sin B + 2R.\sin C = 2.2R.\sin A$

$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A$ (đpcm)

Bài 191. Cho tam giác ABC vuông tại A (BC = a, CA = b, AB = c).

Chứng minh rằng $\frac{c}{a-b} = \frac{1}{\sin C} + \cot gC$

★ ***Hướng dẫn***

Dùng định lí sin và chú ý : A = 90^0 nên sinA = 1, B + C = 90^0 nên sinB = cosC và sinC = cosB

GIẢI

Theo định lí sin, ta có : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ hay

$a = 2R.\sin A \quad , \quad b = 2R.\sin B \quad , \quad c = 2R.\sin C$

Vậy $\frac{c}{a-b} = \frac{2R.\sin C}{2R.\sin A - 2R.\sin B} = \frac{\sin C}{\sin A - \sin B}$

Vì tam giác ABC vuông tại A nên sinA = 90^0 = 1 và sinB = cosC

Vậy $\frac{c}{a-b} = \frac{\sin C}{1-\sin B} = \frac{\sin C}{1-\cos C} = \frac{\sin C(1+\cos C)}{1-\cos^2 C}$

$= \frac{\sin C(1+\cos C)}{\sin^2 C} = \frac{1+\cos C}{\sin C} = \frac{1}{\sin C} + \frac{\cos C}{\sin C}$ hay

$\frac{c}{a-b} = \frac{1}{\sin C} + \cot gC$ (đpcm)

Bài 192. Trong mp(Oxy), cho đường tròn (C) có tâm I(– 5; 2) và bán kính R = $5\sqrt{2}$. Tìm những điểm M trên đường thẳng (d) : y = 2x – 3 sao cho $\mathcal{P}_{M/(C)} > 0$.

★ ***Hướng dẫn***

Dùng công thức $\mathcal{P}_{M/(C)} = IM^2 - R^2$

GIẢI

- Lấy điểm $M(x_0; y_0) \in$ (d) : y = 2x – 3 ta có : $y_0 = 2x_0 - 3$.
- $\mathcal{P}_{M/(C)} = IM^2 - R^2 = (x_0+5)^2 + (y_0-2)^2 - 50$

  $= (x_0+5)^2 + (2x_0-3-2)^2 - 50$

  $= (x_0+5)^2 + (2x_0-5)^2 - 50 = 5x_0^2 - 10x_0$
- $\mathcal{P}_{M/(C)} > 0 \Leftrightarrow 5x_0^2 - 10x_0 > 0 \Leftrightarrow x_0 < 0 \ \text{V} \ x_0 > 2$

Kết luận $\begin{cases} M(x_0; y_0) \in (d): y = 2x - 3 \\ \mathcal{P}_{M/(C)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 < 0 \ \text{V} \ x_0 > 2$

Bài 193. Cho đường tròn (C) có tâm O và bán kính R = 5. Từ điểm M ở ngoài (C), vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB với (C) (T, A, B ∈ (C)). Biết MT = 12 và AB = 7 (MB > MA). Tính OM và MA, MB

★ ***Hướng dẫn***

- $\mathcal{P}_{M/(C)} = MT^2 = MA.MB = OM^2 - R^2$

GIẢI

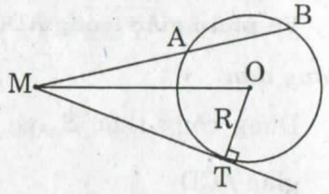
- Tính OM

  Ta có : $\mathcal{P}_{M/(C)} = MT^2 = OM^2 - R^2 \Leftrightarrow OM^2 = MT^2 + R^2$

  Vậy $OM^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169 \Leftrightarrow OM = 13.$
- Tính MA và MB

  Ta có : $\mathcal{P}_{M/(C)} = MT^2 = MA.MB$

  Vậy MA.MB = 144



$\Leftrightarrow$ MA(MA + AB) = 144

$\Leftrightarrow$ MA(MA + 7) = 144

$\Leftrightarrow MA^2 + 7MA - 144 = 0$

$\Leftrightarrow$ MA = – 16 (loại) V MA = 9 (nhận)

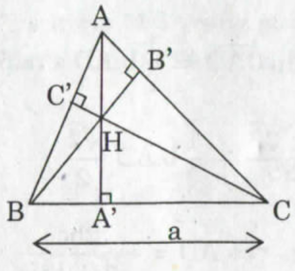
Đáp số : MA = 9 và MB = MA + AB = 16

Bài 194. Cho tam giác ABC có trực tâm H.

Chứng minh rằng các tam giác HBC, HCA, HAB, ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau.

★ ***Hướng dẫn***

- Dùng định lí sin đối với tam giác ABC và tam giác HBC và chú ý $\widehat{BHC} = 180^0 - \widehat{BAC}$
- Tương tự đối với tam giác HBC và ABC, ...



GIẢI

Gọi R, R_a, R_b, R_c lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, HBC, HCA, HAB.

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = 2R \quad \text{và} \quad \frac{BC}{\sin\widehat{BHC}} = 2R_a.$$

Ta có : $\widehat{BHC} = \widehat{B'HC'} = 180^0 - \widehat{BAC}$ (tứ giác AB'HC' nội tiếp) nên $\sin\widehat{BAC} = \sin\widehat{BHC}$

Vậy $R = R_a$

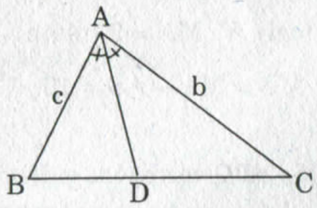
- Tương tự ta cũng có $R = R_b$ (tam giác ABC và tam giác HCA) và $R = R_c$ (tam giác ABC và tam giác HAB)

Vậy $R_a = R_b = R_c = R$ (đpcm)

Bài 195. Cho tam giác ABC vuông tại A : CA = b, AB = c.
Vẽ phân giác trong AD(D ∈ BC). Tính AD theo b và c.

✶ *Hướng dẫn*

- Dùng công thức $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc.\sin A$ đối với tam giác ABD và tam giác ACD



GIẢI

Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD}$

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}bc$ (vì $\sin A = \sin 90^0 = 1$)
- $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \frac{1}{2}c.AD.\sin 45^0 = \frac{1}{2}c.AD.\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}AC.AD.\sin\widehat{CAD} = \frac{1}{2}b.AD.\sin 45^0 = \frac{1}{2}b.AD.\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}c.AD.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}b.AD.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \; AD(b + c).\frac{\sqrt{2}}{2} = bc \quad \Leftrightarrow AD = \frac{2bc}{\sqrt{2}(b+c)} \qquad$ hay $\quad AD = \frac{\sqrt{2}.bc}{b+c}$

Bài 196. tam giác ABC có diện tích S, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R thỏa mãn hệ thức $3S = 2R^2(\sin^3A + \sin^3B + \sin^3C)$.

Chứng minh ABC là tam giác đều

✶ *Hướng dẫn*

- Dùng công thức $S = \frac{abc}{4R}$ và định lí sin để tìm một hệ thức giữa a, b, c.
- Sử dụng bất đẳng thức Côsi (dấu = xảy ra)

GIẢI

- Ta có $S = \frac{abc}{4R}$, $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

  Vậy $3S = 2R^2(\sin^3A + \sin^3B + \sin^3C)$

  $\Leftrightarrow \; \frac{3abc}{4R} = 2R^2\left(\frac{a^3}{8R^3} + \frac{b^3}{8R^3} + \frac{c^3}{8R^3}\right) \quad \Leftrightarrow \; 3abc = a^3 + b^3 + c^3 \;\; (1)$

- Theo bất đẳng thức Côsi : $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc \;\; (2)$
- Đẳng thức (1) ⇔ Dấu "=" ở (2) xảy ra

  $\Leftrightarrow \; a^3 = b^3 = c^3 \quad \Leftrightarrow a = b = c$ (đpcm).

Bài 197. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Trong mp(Oxy), cho A(– 2; 0) và B(0; 6). Tính phương tích của M(– 1; 5) đối với đường tròn tâm A và qua B

a) 14 **b) – 14** **c) 26** **d) – 26**

✶ *Hướng dẫn*

Đường tròn (C) tâm A và qua B có bán kính R = AB

Vậy $\mathcal{P}_{M/(C)} = MA^2 - R^2 = MA^2 - AB^2$

Đáp số : $\mathcal{P}_{M/(C)} = -14$ (câu b)

Bài 198. (Câu hỏi trắc nghiệm)

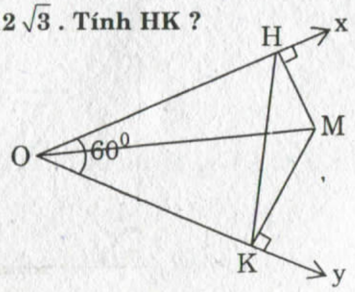
Cho góc xOy = 60^0 và điểm M ở trong góc xOy. Vẽ MH ⊥ Ox và MK ⊥ Oy (hình vẽ). Biết OM = $12\sqrt{3}$. Tính HK ?

a) $13\sqrt{3}$

b) $\frac{18}{\sqrt{3}}$

c) 18

d) 12



★ *Hướng dẫn*

Vì $\widehat{OHM} = \widehat{OKM} = 90^0$ nên tứ giác OHMK nội tiếp trong đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK có đường kính = OM

- Định lí sin đối với tam giác OHK : $\dfrac{HK}{\sin \hat{O}} = OM$

$\Leftrightarrow$ $HK = OM.\sin \hat{O} = 12\sqrt{3}.\sin 60^0 = 12\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 18$

Đáp số : Câu c

Bài 198. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết BC = a, $\hat{B} = 75^0$ và $\hat{C} = 60^0$.

a) $R = a\sqrt{2}$ **b)** $R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ **c)** $R = \dfrac{a}{2}$ **d)** $R = 2a$

★ *Hướng dẫn*

$\hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C}) = 45^0$

Định lí sin : $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a}{2\sin 45^0}$

Đáp số : $R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (câu b)

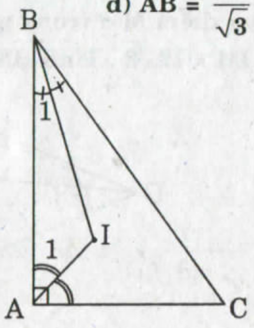
Bài 200. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ABC} = 30^0$. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (hình vẽ).

Biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB bằng 12cm. Tính AB ?

a) **$AB = 12\sqrt{3}$** c) **$AB = 24\sqrt{3}$**

b) **$AB = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$** d) **$AB = \dfrac{24}{\sqrt{3}}$**



★ *Hướng dẫn*

Ta có : $\widehat{AIB} = 180^0 - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) = 180^0 - (45^0 + 15^0) = 180^0 - 60^0$

Áp dụng định lí sin cho tam giác AIB, ta có :

$\dfrac{AB}{\sin \widehat{AIB}} = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB)

$\Leftrightarrow AB = 2R.\sin \widehat{AIB} = 2 \times 12 \times \sin(180^0 - 60^0)$

$= 24\sin 60^0 = 24 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

Đáp số : Câu a

Bài 201. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12 và $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{12}{5}$.

Tính bán kính đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ?

a) $R = \dfrac{12}{5}$ **b)** $R = \dfrac{5}{12}$ **c)** $R = \dfrac{5}{2}$ **d)** $R = \dfrac{2}{5}$

★ *Hướng dẫn*

Dùng định lí sin :

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{12}{\frac{12}{5}} = 5$$

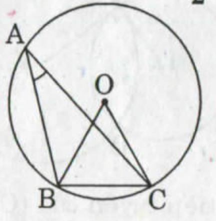
$\Leftrightarrow R = \dfrac{5}{2}$

Đáp số : Câu c

Bài 202. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Trong đường tròn (C) tâm O, bán kính R, vẽ góc nội tiếp $\widehat{BAC} = 30^0$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC ?

a) $\dfrac{R}{2}$ **b)** $R\sqrt{3}$ **c)** $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$



★ *Hướng dẫn*

- $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$ ($\widehat{BOC}$ và $\widehat{BAC}$ lần lượt là góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BC}$)

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 60^0 \Rightarrow$ OBC là tam giác đều $\Rightarrow$ BC = R

- Áp dụng định lí sin cho tam giác OBC ta có : $\dfrac{BC}{\sin \widehat{BOC}} = 2R'$ (R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC)

Vậy $\dfrac{R}{\sin 60^0} = 2R' \Leftrightarrow R' = \dfrac{R}{2\sin 60^0} = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

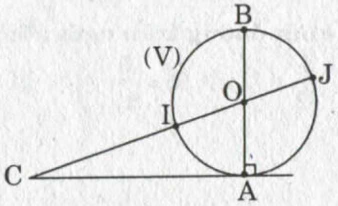
Đáp số : Câu d.

Bài 203. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Tam giác ABC vuông tại A. Gọi O là trung điểm AB, đường tròn (V) có đường kính AB cắt đường thẳng (CO) tại I và J.

Tính CI.CJ biết AC = 4

a) 4 **b) 8** **c) 12** **d) 16**



✶ *Hướng dẫn*

Đường tròn đường kính AB tiếp xúc với AC tại C

Vậy $CI.CJ = \mathcal{P}_{C/(V)} = CA^2 = 16$

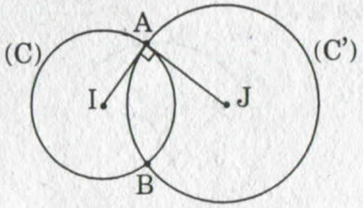
Đáp số : Câu d

Bài 204. (Câu hỏi trắc nghiệm)

Hai đường tròn (C) và (C') lần lượt có tâm I và J. (C) và (C') cắt nhau tại A và B, biết $IJ = 3\sqrt{3}$ và $\widehat{IAJ} = 90^0$.

Tính $T = \mathcal{P}_{I/(C')} = \mathcal{P}_{J/(C)}$?

a) T = 18 **b) T = 27** **c) T = 36** **d) T = 48**



✶ *Hướng dẫn*

Vì IA ⊥ JA nên IA là tiếp tuyến của (C') và JA là tiếp tuyến của (C).

Vậy $\mathcal{P}_{I/(C')} = IA^2$ và $\mathcal{P}_{J/(C)} = JA^2$

$\Rightarrow T = \mathcal{P}_{I/(C')} + \mathcal{P}_{J/(C)} = IA^2 + JA^2 = IJ^2 = 27$

Đáp số : Câu b

Bài 205. Cho tam giác ABC có BC = 10, vẽ đường cao AH. Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đường tròn đường kính AB và AC (hình vẽ).

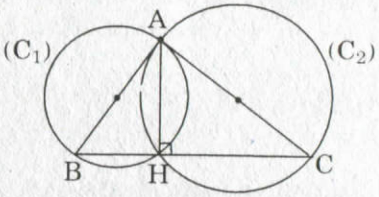
Tính $P = \mathcal{P}_{B/(C_2)} + \mathcal{P}_{C/(C_1)}$?

a) P = 100

b) P = 50

c) P = 40

d) P = 20



✶ *Hướng dẫn*

(C_1) và (C_2) đều qua H, ta có :

$\mathcal{P}_{B/(C_2)} = BH.BC$ và $\mathcal{P}_{C/(C_1)} = CH.CB$

Vậy $P = \mathcal{P}_{B/(C_2)} + \mathcal{P}_{C/(C_1)} = BH.BC + CH.CB$

$= BC(BH + CH) = BC^2 = 100$

Đáp số : P = 100 (câu a)

ĐỀ KIỂM TRA

(Các đề kiểm tra sau đây có mục đích giúp học sinh tự học và tự đánh giá kết quả học tập của mình).

Đề kiểm tra học kì I

Đề 1

I) Câu hỏi lí thuyết (1 điểm)

Học sinh chọn một trong hai câu sau :

Câu 1. Định nghĩa hàm số đồng biến

Áp dụng :

Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Câu 2. Định nghĩa tổng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Áp dụng :

Cho tam giác ABC vuông tại A, biết AB = 3cm và AC = 4cm.

Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$?

II) Câu hỏi trắc nghiệm (3 điểm)

① Cho hàm số $y = f(x) = 2x - 1$ (1)

Phát biểu nào sau đây sai ?

a) $f(2t) = 4t - 1$ c) Hàm số (1) là hàm số lẻ

b) Hàm số (1) đồng biến trên R d) $f(x^2) = 2x^2 - 1$

② Cho ba điểm A, B, C khác nhau đôi một. Câu nào sau đây đúng ?

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

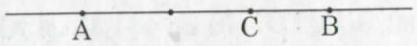
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ d) a, b, c đều sai

③ Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn trên tập xác định của nó ?

a) $f(x) = 1 - 3x$ c) $f(x) = 1 - 3x^2 + x^3$

b) $f(x) = x - 3x^2$ d) $f(x) = 1 - 3x^2 + x^4$

④ Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng như hình vẽ



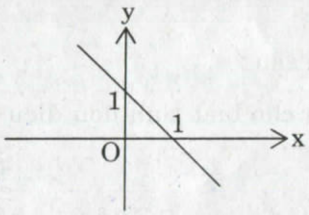
Biết AB = 6cm và BC = 2m

Tính $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}|$?

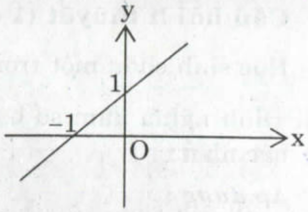
a) 2cm b) 4cm c) 8cm d) Một số khác

⑤ Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2 - 3x}{2}$ là hình nào sau đây ?

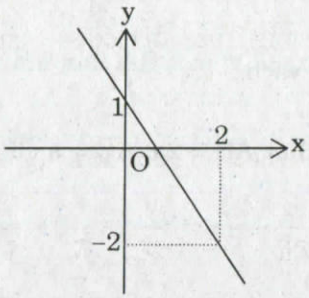
a)



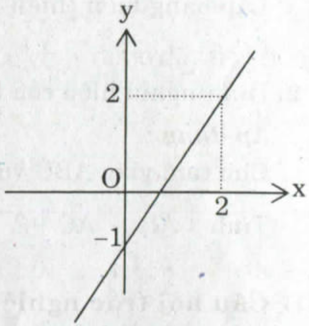
b)



c)

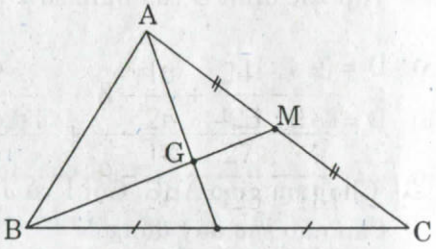


d)



⑥ Cho tam ABC có trọng tâm G và M là trung điểm AC.

Câu nào sau đây đúng ?



a) $\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$

b) $\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{GM} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{MB} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BM}$

III) Toán tự luận (6 điểm)

Bài 1. (3 điểm)

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (1)

a) Tìm tập xác định D của hàm số (1).

b) Chứng minh rằng đồ thị hàm số (1) có tâm đối xứng là gốc tọa độ

c) Tính $f(2x - 1)$ theo x.

Bài 2. (3 điểm)

Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy hai điểm I và J sao cho BI = IJ = JC

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Biết $\hat{A} = 90^0$ và BC = 6cm và đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AC}$. Tính $\vec{u}$?

Đề 2

I) Câu hỏi lí thuyết (1 điểm)

Học sinh chọn một trong hai câu sau :

Câu 1. Định nghĩa hàm số bậc nhất và cho biết tính đơn điệu của hàm số bậc nhất.

Áp dụng :

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{3x + 1}{4}$

Câu 2. Định nghĩa hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Áp dụng :

Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết AB = 2a, AC = $a\sqrt{3}$.

Tính $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$?

II) Câu hỏi trắc nghiệm (3 điểm)

① Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{1 - x} + \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$ là :

a) D = [– 1; 1] **c)** D = [– 1; 1)

b) D = (– 1; 1] **d)** D = (– 1; 1)

② Cho tam giác ABC. Gọi I và J lần lượt là trung điểm AB và AC. Câu nào sau đây đúng ?

a) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}BC$ c) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$

b) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ d) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

③ Cho ba hàm số
$$\begin{cases} y = x\sqrt{x^2 + 1} & (1) \\ y = x^2\sqrt{x^2 + 1} & (2) \\ y = \dfrac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} & (3) \end{cases}$$

Hàm số nào là hàm số lẻ trên R ?

a) (1) và (2) **b)** (2) và (3) **c)** (3) và (1) **d)** (1), (2), (3)

④ Cho hình thoi ABCD có cạnh bằng a và $\widehat{BAD} = 120^0$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$?

a) a **b)** $\frac{a}{2}$ **c)** $a\sqrt{3}$ **d)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

⑤ Hàm số $y = (2m - 1)x + m^2 - m + 2$ nghịch biến trên R khi :

a) $m > \frac{1}{2}$ **b)** $m \geq \frac{1}{2}$ **c)** $m < \frac{1}{2}$ **d)** $m \leq \frac{1}{2}$

⑥ Cho tam giác ABC có trọng tâm G. M là trung điểm BC.

Biết AM = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm. Tính $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$?

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ **d)** $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

III)Toán tự luận (6 điểm)

Bài 1. (3 điểm)

Cho hai hàm số $\begin{cases} y = x - 2 & (1) \\ y = -x - 4 & (2) \end{cases}$

Gọi (d_1) và (d_2) lần lượt là đồ thị của hàm số (1) và hàm số (2).

a) Tìm tọa độ của A (A là giao điểm của (d_1) và (d_2)).

b) Trên (d_1) lấy điểm B có hoành độ $x_B = 1$ và trên (d_2) lấy điểm C có tung độ $y_C = 1$. Chứng tỏ tam giác ABC là tam giác vuông.

Tìm tọa độ của B và C. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng (BC).

Bài 2. (3 điểm)

Cho tam giác ABC. M là điểm được xác định bởi $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

a) Chứng minh rằng M, B, C thẳng hàng . Điểm M chia đoạn BC theo tỉ số k bằng bao nhiêu ?

b) Biết $\widehat{ABC} = 60^0$ và AB = AM = $3\sqrt{3}$ cm. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MC}$?

Đề 3

I) Câu hỏi lí thuyết (1 điểm)

Học sinh chọn một trong hai câu sau :

Câu 1. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị là parbol (P). Hãy viết tọa độ đỉnh S và phương trình trục đối xứng của (P).

Áp dụng :

Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol (P) : $y = -2x^2 - 4x + 5$. Tìm tọa độ đỉnh S và phương trình trục đối xứng của (P).

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Descartes vuông góc, gọi $\vec{i}$ và $\vec{j}$ lần lượt là vectơ đơn vị của hai trục. Hãy định nghĩa tọa độ của vectơ $\vec{a}$ nằm trong mặt phẳng tọa độ nói trên.

Áp dụng :

Cho $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{i}$ và $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$.

Tìm tọa độ của $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{a} + 2\vec{b}$

II) Câu hỏi trắc nghiệm (3 điểm)

① Hàm số $y = 2x^2 - 4x - 5$ có đồ thị là parabol (P).

Câu nào sau đây sai ?

a) (P) qua điểm M(– 1; 1)

b) (P) có đỉnh là (1; – 7)

c) (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$

d) (P) cắt trục hoành tại hai điểm

② Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(– 1; 3), B(2; – 1). Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BA}$

a) (2; – 1) b) (– 2; 1) c) (3; – 4) d) (– 3; 4)

③ Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol (P) như hình vẽ

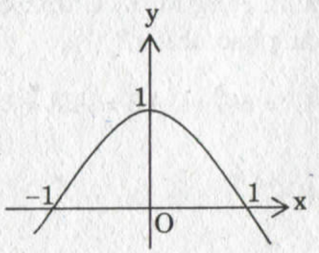
Câu nào sau đây đúng ?

a) $y = (1 - x)(1 + x)$

b) $y = (x - 1)(x + 1)$

c) $y = (1 - x)^2$

d) $y = (1 + x)^2$



④ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (2; -3)$ và $\vec{b} = (-1; 1)$.

Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5

⑤ Đồ thị hàm số $y = x^2 + ax + b$ có đồ thị là parabol (P). Biết (P) có đỉnh là S(1; 2), lúc đó :

a) $y = x^2 + 2x + 1$ **c)** $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = x^2 + 2x - 2$ **d)** $y = x^2 - 2x + 3$

⑥ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm : A(– 2; – 2), B(0; 4) và C(m; m + 2). Tính m để A, B, C thẳng hàng ?

a) $m = 1$ **b)** $m = -1$ **c)** $m = 2$ **d)** $m = -2$

III) Toán tự luận (6 điểm)

Bài 1. (3 điểm)

Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số (1)

b) Gọi S là điểm cực tiểu của (P), A là giao điểm của (P) với trục hoành $(x_A > 2)$ và B là giao điểm của (P) với trục tung.

- Tính chu vi tam giác SAB
- Chứng minh tam giác SAB vuông.

Bài 2. (3 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm : A(– 1; 1), B(5; 5)

a) Tìm điểm M trên trục tung sao cho M cách đều A và B. Trong trường hợp này, chứng tỏ MAB là tam giác vuông cân tại M.

b) Tìm điểm N ∈ trục tung (N ≠ M) sao cho tam giác ANB vuông tại N.

Đề 4

I) Câu hỏi lí thuyết (1 điểm)

Học sinh chọn một trong hai câu sau :

Câu 1. Định nghĩa nhị thức bậc nhất theo biến x và trình bày dấu của nhị thức bậc nhất nói trên

Áp dụng :

Xét dấu biểu thức $P(x) = (2x - 1)^2 - x(4x - 1)$

Câu 2. Trong mặt phẳng (Oxy), cho hai điểm : $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Hãy viết công thức tính tọa độ của M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \neq 1)$ (không yêu cầu chứng minh)

Áp dụng :

Cho A(– 1; 3) và B(3; 0). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$. Tìm tọa độ của M.

II) Câu hỏi trắc nghiệm (3 điểm)

① Cho nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ có bảng xét dấu như sau :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f(x)		+	0	–	

Câu nào sau đây đúng ?

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x+4}{-3}$

b) $f(x) = \dfrac{-x+2}{-3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2x+4}{3}$

② Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy hai điểm A và B ở trên trục hoành có hoành độ lần lượt là – 1 và 4, C là giao điểm của đường thẳng $y = 4x - 1$ với trục tung.

Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC ?

a) (1; – 1) **b)** $(1; -\frac{1}{3})$ **c)** $(\frac{1}{3}; -1)$ **d)** (– 1; 1)

③ Cho nhị thức bậc nhất $f(x) = mx + m^2 + m - 1$ có bảng xét dấu như sau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f(x)		–	0	+	

Hãy tính m ?

a) $|m| = 1$ **b)** $m = -1$ **c)** $m = 1$ **d)** Một giá trị khác

④ Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm : A(– 1; 3) và M(x; y). Biết $2\overrightarrow{AM} = (0; 4)$, tính tọa độ của M ?

a) M(– 1; 5) **b)** M(5; – 1) **c)** M(– 1; – 5) **d)** M(– 5; – 1)

⑤ Cho ba nhị thức bậc nhất
$$\begin{cases} f(x) = 1 - 3x & (1) \\ g(x) = \dfrac{6x - 2}{4} & (2) \\ h(x) = -2(3x - 1) & (3) \end{cases}$$

Các nhị thức nào cùng có cùng một bảng xét dấu ?

a) (1) và (2) **b)** (2) và (3) **c)** (3) và (1) **d)** Cả ba.

⑥ Cho $\vec{u} = (2a - 1; a)$. Tính a để $|\vec{u}| = 1$.

a) $a = 0 \lor a = \frac{4}{5}$ **c)** $a = 1 \lor a = \frac{5}{4}$

b) $a = 0 \lor a = \frac{5}{4}$ **d)** $a = 1 \lor a = \frac{4}{5}$

III) Toán tự luận (6 điểm)

Bài 1. (3 điểm)

Cho nhị thức bậc nhất : $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$

a) Tính a và b biết $f(-1) = 5$ và $f(1) = 1$. Trong trường hợp này, lập bảng xét dấu f(x) ?

b) Với giá trị a và b tính ở câu a. Chứng minh rằng $f(1 - x) + f(1 + x)$ không phụ thuộc vào giá trị của x.

Bài 2. (3 điểm)

Trong mặt phẳng (Oxy), cho ba điểm : A(– 2; 1), B(0; 5), C(8; 1)

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông. Tính chu vi tam giác ABC.

b) Tìm điểm D sao cho ABCD là hình chữ nhật và tìm tọa độ tâm đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D ?

ề 5

I) Câu hỏi lí thuyết (1 điểm)

Học sinh chọn một trong hai câu sau :

âu 1. Hãy trình bày cách giải bất phương trình $ax + b \geq 0$

Áp dụng :

Xác định m để bất phương trình $m^2(x - 1) - (x - 1) \geq 1 - m$ có tập nghiệm $S = \varnothing$.

âu 2. Hãy viết tất cả các công thức liên hệ giữa sinα và cosα, giữa cosα và tgα, giữa sinα và cotgα.

Áp dụng :

Tính cosα biết $0^0 < \alpha < 90^0$ và $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

II) Câu hỏi trắc nghiệm (3 điểm)

① Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 + m + 3 = 0$ (*).

Xác định m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

a) $m > 3$ **b)** $m < 3$ **c)** $m > -3$ **d)** $m < -3$

② Biết $tg\alpha = -2$ và $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Tính sin α ?

a) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ **b)** $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ **c)** $\sin\alpha = \frac{1}{6}$ **d)** $\sin\alpha = -\frac{1}{6}$

③ Xác định tất cả các giá trị của a để bất phương trình $(1 - a)x + a > 0$ có tập nghiệm $S = (-\infty; \frac{a}{a-1})$

a) $a > 1$ **b)** $a < 1$ **c)** $a > 0$ **d)** $a < 0$

④ Cho $\cot gx = -1$ $(90^0 < x < 180^0)$, tính sinx ?

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\sin x = \frac{1}{2}$ **d)** $\sin x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

⑤ Với những giá trị nào của m thì bất phương trình $2x + m - 1 \geq 0$ được nghiệm đúng với mọi $x \geq 2$

a) $m > 3$ **b)** $m \geq 3$ **c)** $m > -3$ **d)** $m \geq -3$

⑥ Cho $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$. Tính sinx.cosx ?

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $-\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{3}{8}$ **d)** $-\frac{3}{8}$

III)Toán tự luận (6 điểm)

Bài 1. (3 điểm)

Cho hàm số $y = -x^2 + ax + b$ (1)

Biết đồ thị hàm số (1) là parabol qua điểm A(– 1; 4) và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

a) Tính a và b ? Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số (1)

b) Với giá trị a và b tìm được ở câu a. Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm I và J. Biết $IJ = 3$, tính m ?

Bài 2. (3 điểm)

a) Cho $tg\alpha + \cot g\alpha = -4$. Tính giá trị biểu thức $T = tg^3\alpha + \cot g^3\alpha$.

b) Chứng minh đẳng thức $\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = 2\cot g\alpha$

$(0^0 < \alpha < 180^0)$

c) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4\cos^2\alpha + \sin^4\alpha} + \sqrt{4\sin^2\alpha + \cos^4\alpha}$

Đề kiểm tra học kì II và cuối năm

Đề 1

I) Câu hỏi lí thuyết (1 điểm)

Học sinh chọn một trong hai câu sau :

Câu 1. Hãy lập phương trình bậc hai để tìm hai số a và b, nếu biết tổng S = a + b và tích P = a.b. Nêu điều kiện để tính được a và b.

Áp dụng :

Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 34m và diện tích bằng $60m^2$. Tính độ dài mỗi cạnh của khu vườn nói trên.

Câu 2. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Áp dụng :

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$?

II) Câu hỏi trắc nghiệm (3 điểm)

① Lập phương trình bậc hai để tìm hai số α và β biết α + β = 12 và α.β = 60 ?

a) $x^2 - 60x + 12 = 0$ **c)** $x^2 - 12x + 60 = 0$

b) $x^2 + 60x + 12 = 0$ **d)** $x^2 + 12x + 60 = 0$

② Phương trình $3x^2 - 5x - 15 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2.

Tính giá trị biểu thức $T = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$?

a) $T = \frac{1}{3}$ **b)** $T = -\frac{1}{3}$ **c)** $T = 3$ **d)** $T = -3$

③ Cho phương trình bậc hai : $2x^2 - mx - (3m^2 + 5) = 0$

Câu nào sau đây sai ?

a) Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$.

c) Khi m = 0 thì phương trình có hai nghiệm đối nhau.

d) Khi m > 0 thì phương trình có hai nghiệm dương.

④ Cho tam giác ABC vuông cân ($\widehat{A} = 90^0$) và $BC = a\sqrt{2}$.

Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$?

a) a^2 **b)** $-a^2$ **c)** $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$ **d)** $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$

⑤ Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vectơ $\vec{0}$

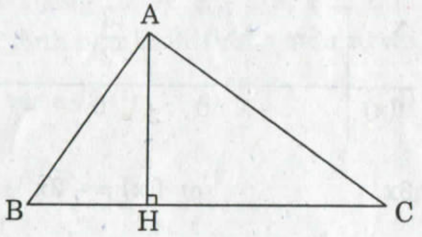
Câu nào sau đây đúng ?

a) $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$ **c)** $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{c}$

b) $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = (\vec{a}.\vec{c}).(\vec{b}.\vec{c})$ **d)** $(\vec{a}.\vec{b}) + (\vec{a}.\vec{c})$ là một vectơ.

⑥ Cho tam giác ABC có đường cao AH (hình vẽ). Biết BC = 15 và BH = 5. Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$?

a) 75 **b)** 50 **c)** 125 **d)** 150



III)Toán tự luận (6 điểm)

Bài 1. (3 điểm)

Cho phương trình : $x^2 + 2(2m + 1)x + 8m = 0$ (1)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có nghiệm và giải phương trình (1) khi m = – 1.

b) Với những giá trị nào của m thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều khác 0 ? Trong trường hợp này, chứng minh rằng $T = 2(x_1 + x_2) + x_1x_2$ có giá trị không phụ thuộc vào m.

Bài 2. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^0$, AB = 4cm, AC = 8cm.

a) Tính BC ?

b) Vẽ phân giác trong AD của góc A (D ∈ BC).

Tính DB, DC và AD.

ề 2

I) Câu hỏi lí thuyết (1 điểm)

Học sinh chọn một trong hai câu sau :

âu 1. Định nghĩa tam thức bậc hai f(x) theo biến x và trình bày dấu cảu f(x) khi f(x) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$

Áp dụng : Xét dấu $f(x) = (2x - 1)^2 - (x + 3)^2$

âu 2. Phát biểu (không chứng minh) định lí cosin và định lí sin đối với tam giác ABC.

Áp dụng :

Cho tam giác ABC có AB = 4cm, BC = 3 và CA = $\sqrt{13}$

Tính $\hat{B}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

II) Câu hỏi trắc nghiệm (3 điểm)

① Xác định $f(x) = -2x^2 + ax + b$ biết bảng xét dấu của f(x) là :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	

a) $f(x) = -2x^2 - 3x$ **c)** $f(x) = -2x^2 + \frac{3}{2}x$

b) $f(x) = -2x^2 + 3x$ **d)** $f(x) = -2x^2 + \frac{2}{3}x$

② Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\dfrac{3x^2 + 1}{-3x^2 - x + 2}}$ là :

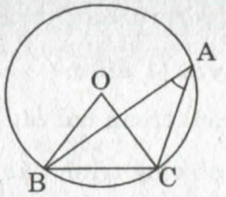
a) $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$ **b)** $\left(1; -\frac{2}{3}\right)$ **c)** $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ **d)** $\left(1; -\frac{3}{2}\right)$

③ Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 \le 0 \\ x + 5 > 2(x + 2) \end{cases}$ là :

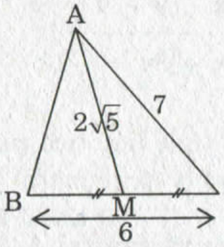
a) $S = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ **b)** $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ **c)** $S = \left[\frac{1}{2}; 1\right)$ **d)** $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right]$

④ Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Biết $\widehat{BAC} = 30^0$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC ?

a) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{R}{\sqrt{3}}$ $\frac{R}{2\sqrt{3}}$ **d)** $\frac{R}{2}$



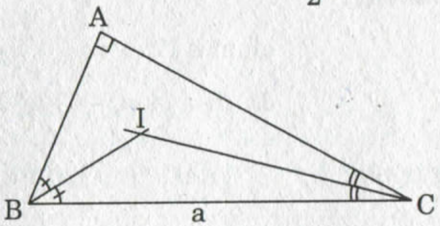
⑤ Cho tam giác ABC : BC = 6, CA = 7. Biết trung tuyến AM = $2\sqrt{5}$. Tính AB ?



a) AB = 3 **b)** AB = 4 **c)** AB = $3\sqrt{2}$ **d)** AB = $4\sqrt{2}$

⑥ Tam giác ABC vuông tại A, BC = a. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC ?

a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **b)** $a\sqrt{2}$ **c)** $\frac{a}{2}$ **d)** $\frac{a}{2\sqrt{2}}$



III)Toán tự luận (6 điểm)

Bài 1. (3 điểm)

Cho bất phương trình $x^2 - (m + 2)x + m + 1 < 0$ (1)

a) Giải bất phương trình (1) khi m = 0

b) Tùy theo m, giải và biện luận bất phương trình (1)

c) Chứng minh rằng khi bất phương trình (1) có nghiệm x > 1 thì m > x − 1.

Bài 2. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có AB = x, AC = y và BC = $4\sqrt{2}$.

a) Tính $\hat{A}$ và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi x = 4 và y = 8

b) Vẽ phân giác trong AD (D ∈ BC).

Tính DB, DC và AD theo x và y biết $\widehat{BAC} = 60^0$.

Đề 3

I) Câu hỏi lí thuyết (1 điểm)

Học sinh chọn một trong hai câu sau :

Câu 1. Định nghĩa hệ phương trình bậc nhất hai ẩn và trình bày cách giải hệ này.

Áp dụng :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ 3x + 8y = -13 \end{cases}$

Câu 2. Viết tất cả các công thức tính diện tích của tam giác ABC.

Áp dụng :

Cho tam giác ABC vuông và cân tại A, AB = 6cm. D là điểm đối xứng của C qua B. Tính diện tích tam giác ACD.

II) Câu hỏi trắc nghiệm (3 điểm)

① Với những giá trị nào của m thì phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

a) $m \in (-1; 2)$ **c)** $m \in (2; +\infty)$

b) $m \in (-\infty; -1)$ **d)** $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

② Cho ba hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ x^3 - y^3 = 1 \end{cases} \ (1) \qquad \begin{cases} 2(x + y) - xy = 4 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases} \ (2) \qquad \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \\ x^2y + xy^2 = 6 \end{cases} \ (3)$$

Hệ phương trình nào có tính đối xứng đối với x và y ?

a) (1) và (2) **b)** (2) và (3) **c)** (3) và (1) **d)** Cả ba.

③ Cho hàm số $y = \sqrt{-2x^2 + 4x + m}$

Với những giá trị nào của m thì hàm số có tập xác định là $D = [\alpha; \beta]$ $(\alpha < \beta)$

a) $m > -2$ **b)** $m \geq -2$ **c)** $m < -2$ **d)** $m \leq -2$

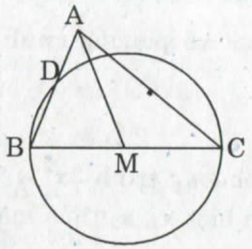
④ Tam giác ABC có $AB = 2\sqrt{3}$, AC = 6 và diện tích S = 9. Tính $\widehat{BAC}$?

a) 30^0 **b)** 45^0 **c)** 60^0 **d)** 90^0

⑤ Cho tam giác ABC : BC = 8cm, trung tuyến AM = 6cm. Đường tròn đường kính BC cắt AB tại D (xem hình vẽ)

Biết AD = 4cm. Tính AB ?

a) 5cm **b)** 6cm **c)** 8cm **d)** 9cm



⑥ Cho tam giác ABC. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại M và N (hình vẽ).

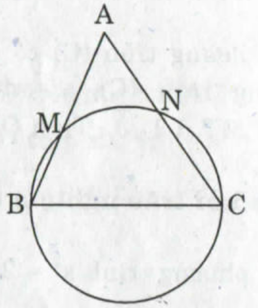
Câu nào sau đây đúng ?

a) $MN = \frac{1}{2}BC$

b) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

c) $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$

d) BM.BA = CN.CA



III) Toán tự luận (6 điểm)

Bài 1. (3 điểm)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y - m = 0 \\ 4x - my - 2m = 0 \end{cases}$ (1)

a) Giải hệ phương trình (1) khi $m = \sqrt{3}$

b) Xác định m để hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ duy nhất.

Trong trường hợp này, tìm hệ thức giữa x_0, y_0 độc lập đối với m.

Bài 2. (3 điểm)

Cho tam giác ABC : BC = 6cm, CA = $3\sqrt{3}$ cm, AB = 3cm.

a) Tính các góc của tam giác ABC.

b) Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đường tròn đường kính AB và AC.

Chứng minh $\mathcal{P}_{B/(C_2)} + \mathcal{P}_{C/(C_1)} = BC^2$.

Đề 4

I) Câu hỏi lí thuyết (1 điểm)

Học sinh chọn một trong hai câu sau :

Câu 1. Cho phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1)

Phát biểu định lí nói về phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < \alpha < x_2$.

Áp dụng :

Chứng minh rằng phương trình $3x^2 - 2(m - 1)x - (2m + 5) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$.

Câu 2. Cho đường tròn (C) có tâm I và bán kính R.

Định nghĩa phương tích của điểm M đối với (C) ?

Áp dụng :

Cho đường tròn (C) có đường kính AB = 6cm. M là điểm ở ngoài đường tròn (C), vẽ tiếp tuyến MT với (C) (T là tiếp điểm). Biết $MT = 3\sqrt{3}$. Tính OM (O là trung điểm của AB).

II) Câu hỏi trắc nghiệm (3 điểm)

① Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 5m - 1 = 0$

Với những giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$

a) $m > 2$ **b)** $m > -2$ **c)** $m < 2$ **d)** $m < -2$

② Biết phương trình $x^2 - 7x - 21 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Tính $T = x_1^3 + x_2^3$?

a) T = 874 **b)** T = 487 **c)** T = 784 **d)** T = 847

③ Xác định m để phương trình $2x^2 + 2(m - 1)x + m = 0$ có hai nghiệm trong đó có một nghiệm âm và nghiệm còn lại lớn hơn 1.

a) $0 < m < 4$ **b)** $-4 < m < 0$ **c)** $m < 0$ **d)** $m > 4$

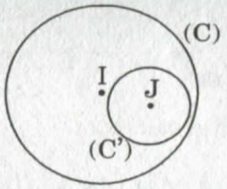
④ Cho hai đường tròn (C) và (C'), (C) chứa (C') (Xem hình vẽ)

Gọi $P_1 = \mathcal{P}_{B/(C)}$ và $P_2 = \mathcal{P}_{C/(C')}$.

Biết $P_1.P_2 < 0$. Câu nào sau đây đúng ?

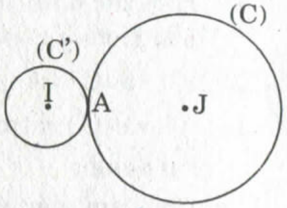
a) M ở trong (C') **c)** M ở ngoài (C') và ở trong (C)

b) M ở ngoài (C) **d)** a, b, c đều sai



⑤ Cho hai đường tròn (C) và (C') tiếp xúc ngoài tại A.

Trục đẳng phương của (C) và (C') là :



a) Tiếp tuyến chung của (C) và (C').

b) Tiếp tuyến chung tại A của (C) và (C').

c) Đường thẳng vuông góc với IJ.

d) Một đường thẳng khác với các đường thẳng nói ở a, b, c.

⑥ Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\frac{BD}{AB} = \frac{BA}{BC}$.

Câu nào sau đây đúng ?

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tiếp xúc với AC.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD tiếp xúc với AB.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AD.

d) a, b, c đều sai .

III) Toán tự luận (6 điểm)

Bài 1. (3 điểm)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = m \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$ (1)

a) Giải hệ (1) khi m = 1.

b) Chứng tỏ hệ phương trình (1) có nghiệm (x; y) với mọi m.

Bài 2. (3 điểm)

Cho đường tròn (C) có tâm O, bán kính R = 2a và đường tròn (C') có tâm O', bán kính R' = 4a. Biết OO' = 6a

a) Chứng minh (C) và (C') tiếp xúc ngoài (gọi A là tiếp điểm)

b) Qua A, vẽ đường thẳng (d) lần lượt cắt (C) và (C') và B và C sao cho OB và O'C lần lượt cắt tại trục đẳng phương của (C) và (C') tại I và J.

- Chứng minh BICJ là hình thang.
- Biết $\widehat{OBA} = 30^0$. Tính AB, BC, BI, CJ và IJ ?

Đề 5

I) Câu hỏi lí thuyết (1 điểm)

Học sinh chọn một trong hai câu sau :

Câu 1.

- Định nghĩa trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C').
- Hãy xác định trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C') trong mỗi trường hợp sau :

a) (C) và (C') tiếp xúc nhau.

b) (C) và (C') cắt nhau.

Áp dụng :

Cho tam giác ABC. Gọi (C) là đường tròn tâm B, bán kính BA và (C') là đường tròn tâm C, bán kính CA.

Hãy xác định trục đẳng phương của (C) và (C').

Câu 2. Hãy nêu các điều kiện để phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn :

a) $x_1 < \alpha < x_2$ **b)** $x_1 < x_2 < \beta$ hay $\beta < x_1 < x_2$.

Áp dụng :

Xác định m để phương trình $2x^2 - (m + 1)x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $-1 < x_1 \leq x_2$.

II) Câu hỏi trắc nghiệm (3 điểm)

① Phương trình nào sau đây có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < 1$

a) $2x^2 - 7x + 2 = 0$ **c)** $2x^2 + 7x + 4 = 0$

b) $2x^2 + 7x + 8 = 0$ **d)** $2x^2 - 7x + 6 = 0$

② Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ xy = m \end{cases}$

Xác định m để hệ phương trình có hai nghiệm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ sao cho $y_1 < -2 < y_2$

a) $m > 4$ **b)** $m < 4$ **c)** $m > -4$ **d)** $m < -4$

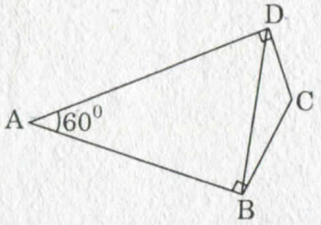
③ Tính x và y biết $\begin{cases} x > y \\ xy = -3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

a) $x = \dfrac{3}{2}$ và $y = -2$ **c)** $x = \dfrac{1}{3}$ và $y = -9$

b) $x = 3$ và $y = -1$ **d)** $x = \dfrac{2}{3}$ và $y = -\dfrac{9}{2}$

④ Cho tứ giác ABCD (hình vẽ). Biết $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^0$, $\widehat{A} = 60^0$ và BD = 12cm. Tính AC ?

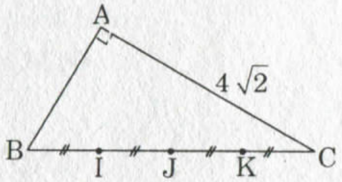
a) $16\sqrt{3}$ cm **b)** $12\sqrt{3}$ cm **c)** $8\sqrt{3}$ cm **d)** $4\sqrt{3}$ cm



⑤ Cho tam giác ABC vuông tại A : $AC = 4\sqrt{2}$. Trên cạnh BC lấy ba điểm I, J, K sao cho $BI = IJ = JK = KC = \dfrac{3}{2}$ (hình vẽ). Tính AK ?

a) $AK = \dfrac{\sqrt{73}}{2}$ **c)** $AK = \dfrac{\sqrt{93}}{2}$

b) $AK = \dfrac{\sqrt{83}}{2}$ **d)** $AK = \dfrac{\sqrt{103}}{2}$



⑥ Cho tam giác ABC (BC = a, CA = b, AB = c). Biết 7a = 4b + c.

Câu nào sau đây đúng ?

a) $\dfrac{\sin A}{7} = \dfrac{\sin B}{4} = \dfrac{\sin C}{1}$ **c)** $7\sin A = 4\sin B + \sin C$

b) Tam giác ABC là tam giác vuông. **d)** a, b, c đều sai.

III)Toán tự luận (6 điểm)

Bài 1. (3 điểm)

Cho phương trình $x^4 - 2(m + 1)x^2 + m + 4 = 0$

a) Giải phương trình khi m = 1

b) Xác định m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4. trong trường hợp này tính $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ theo m.

Bài 2. (3 điểm)

Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = a\sqrt{3}$ (a là hằng số dương)

a) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\mathcal{P}_{M/(O)} + 2OM^2 = 21a^2$

b) Đường thẳng (d) qua M cắt đường tròn (C) tại A và B sao cho A là trung điểm MB. Tính MA, MB ?